



Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique cyclique.

Benjamin Pommier

► To cite this version:

Benjamin Pommier. Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique cyclique.. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2003. Français. NNT : . pastel-00004229

HAL Id: pastel-00004229

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00004229>

Submitted on 22 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

Benjamin Pommier

**Détermination de la réponse asymptotique d'une
structure anélastique soumise à un chargement
thermomécanique cyclique**

Application au dimensionnement à la fatigue thermomécanique
des culasses automobiles

Soutenue le 10 Octobre 2003 devant le jury composé de :

Président :	M. G. Maier
Rapporteurs :	M. Philippe Boisse
	M. Alain Millard
Examineurs :	M. Ky Dang Van
	M. M.H. Maïtournam
	M. J.J. Thomas

Dans le cadre du dimensionnement à la fatigue thermomécanique des culasses automobiles, nous proposons une méthode de simulation des structures soumises à des chargements cycliques.

Cette méthode, alternative aux méthodes classiques (comme la méthode incrémentale) permet de résoudre des problèmes thermomécaniques cycliques non-linéaires. Il s'agit d'une *Méthode Cyclique Directe* qui consiste à rechercher directement la solution asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique périodique, sans suivre l'histoire du chargement. Elle est fondée sur les techniques de grand incrément de temps [Ladevèze et al.], en prenant en compte la périodicité de l'état limite [Nguyen et al.] et la transformation de Fourier.

Cette méthode permet des gains de temps importants pour les structures comprenant un grand nombre de degrés de liberté. Un développement de cette méthode dans une version commerciale d'Abaqus, a permis de montrer la faisabilité de cette approche dans le cas de la simulation d'une culasse.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre I Dimensionnement à la fatigue thermomécanique	7
1. Introduction aux phénomènes de fatigue	8
2. Dimensionnement à la fatigue oligocyclique	9
3. Critères de prévision de durée de vie en fatigue thermomécanique.....	11
4. Dimensionnement des culasses à la fatigue thermomécanique	13
4.1 Description d'une culasse	13
4.2 Approche globale de dimensionnement et application aux culasses	15
Chapitre II Structures sous chargement cyclique : modélisation numérique	24
1. Réponse asymptotique d'une structure	24
2. Analyse de l'état limite.....	26
3. Méthodes numériques	27
3.1 Position du problème	27
3.2 Méthode des éléments finis	28
3.3 La méthode incrémentale	29
3.4 La méthode à grand incrément de temps	32
3.5 Méthode des sauts de cycles	36
3.6 Analyse simplifiée des structures : méthode ZAC	38
3.7 Approche cyclique	42
3.8 Méthode du contrôle optimal.....	43
Chapitre III Méthode Cyclique directe.....	45
1. Contexte général.....	45
2. Position du problème	46
3. Principe de la méthode cyclique	48
4. Description générale.....	49
4.1 Etape globale.....	50
4.2 Etape locale.....	55
4.3 Condition de périodicité.....	61
4.4 Condition d'arrêt.....	63
5. Illustration de la méthode.....	64
6. Formulation générale de la résolution d'un problème non linéaire périodique par série de Fourier	70
6.1 Résolution du problème non linéaire	70

Chapitre IV Validation numérique	77
1. <i>Programmation de la méthode cyclique directe</i>	<i>77</i>
2. <i>Cas tests avec la version programmée dans Matlab</i>	<i>78</i>
2.1 Cube isotherme élastoplastique	78
2.2 Cube anisotherme élastoviscoplastique	81
2.3 Plaque trouée mécanique	83
2.4 Exemple de la plaque pontet	85
3. <i>Implémentation de la méthode cyclique directe dans Abaqus</i>	<i>88</i>
4. <i>Cas tests sous Abaqus</i>	<i>89</i>
4.1 Cube anisotherme élastoplastique	89
4.2 Comportement de la méthode en cas de rochet.....	90
4.3 Loi de comportement écrouissage cyclique	92
4.4 Plaque trouée anisotherme	92
4.5 Culasse monocylindre	98
4.6 Temps de calcul	104
Conclusion	107

Introduction

La simulation numérique du comportement mécanique des structures est couramment adoptée par les bureaux d'études industriels. Elle permet de considérablement diminuer les temps de conception, grâce notamment à une meilleure réactivité entre le dessin d'une pièce et la connaissance de sa tenue et de son fonctionnement en utilisation. Le prototypage et les essais physiques, qui jusqu'à présent permettaient de s'assurer de la résistance mécanique de la pièce, sont maintenant employés en fin de projet, pour valider la conception de la structure.

Dans le cadre de travaux exploratoires sur la conception des moteurs Diesel, la direction de la recherche de PSA Peugeot Citroën, en collaboration avec le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique a développé une filière numérique de dimensionnement à la fatigue thermomécanique des pièces métalliques sollicitées à hautes températures.

Les travaux de [CHARKALUK 99], [VERGER 02] ont permis de valider cette approche pour le dimensionnement des collecteurs d'échappement en fonte et des culasses en alliage d'aluminium.

Celle-ci s'appuie principalement sur la détermination de la réponse stabilisée de la structure soumise à un chargement cyclique représentatif de l'ensemble des sollicitations réelles. A partir de cette réponse stabilisée, un critère énergétique permet d'estimer la tenue en service de la structure.

Dans le cadre du dimensionnement des collecteurs d'échappement, cette approche a été mise en application et constitue maintenant l'outil de dimensionnement utilisé dans les bureaux d'études. Cependant, sa mise en œuvre pour le dimensionnement des culasses reste limitée de par les temps de calcul nécessaires à la simulation de la réponse de la structure. En effet, les culasses automobiles sont des pièces particulièrement complexes, tant au niveau de la géométrie que des gradients thermiques et mécaniques rencontrés, ce qui nécessite des temps de calcul trop longs, incompatibles avec la réactivité recherchée. Nous présenterons succinctement, dans un premier chapitre, le cadre de cette approche globale de dimensionnement, illustré par les résultats les plus significatifs.

L'objectif de ce travail est de proposer une méthode numérique permettant d'améliorer ces temps de calcul, tout en restant compatible avec le reste de la filière de dimensionnement.

La discrétisation temporelle incrémentale associée à un schéma de résolution des problèmes non-linéaires de type Newton-Raphson et à une discrétisation spatiale par éléments finis est la technique la plus courante dans les codes de calcul pour la simulation mécanique. De nombreux auteurs ont proposé des stratégies alternatives aux techniques incrémentales pour améliorer les temps de calcul. Certaines techniques sont assez générales, d'autres sont plus orientées vers le traitement des problèmes de structures sous chargements cycliques. Nous donnerons dans le second chapitre, une présentation des méthodes comparables à notre approche.

Dans un troisième chapitre, nous présenterons la méthode cyclique directe. Celle-ci propose une stratégie de résolution originale par rapport aux techniques incrémentales,

pour déterminer le comportement asymptotique d'une structure anélastique soumise à un chargement thermomécanique cyclique. On recherche directement une solution périodique au problème posé, sans suivre l'évolution du chargement. Une technique de recherche des déplacements par décomposition en série de Fourier est proposée pour diminuer le coût numérique de la résolution des équations d'équilibre de la structure.

Nous avons développé la méthode cyclique directe dans le logiciel Matlab afin d'en montrer la faisabilité. Suite à une collaboration entre PSA et Abaqus Inc., celle-ci a été implémentée dans le code de calcul industriel Abaqus. Dans le dernier chapitre, nous illustrerons sur des cas tests et sur un cas industriel, la faisabilité de la méthode et nous présenterons quelques résultats significatifs.

Chapitre I

Dimensionnement à la fatigue thermomécanique

La conception mécanique s'appuie toujours plus sur la simulation numérique pour s'assurer, dès les premières phases de développement, de la résistance des pièces aux sollicitations mécaniques rencontrées en cours de fonctionnement. Les phases de tests avec des pièces prototypes physiques permettant de départager des solutions disparaissent au profit de tests virtuels s'appuyant sur la simulation numérique de la résistance mécanique des pièces. Les phases prototypes ne sont alors employées qu'en tant que moyens de validation des solutions retenues.

La constante progression de la puissance informatique mise à la disposition des bureaux d'études mais aussi les apports fondamentaux de la recherche mécanique en matière d'algorithmes ou de modèles mathématiques de comportement des matériaux permettent de simuler des phénomènes mécaniques toujours plus complexes.

C'est pourquoi la simulation numérique a pris de plus en plus d'importance dans les schémas de conception mécanique d'une structure et que les problèmes physiques qu'elle permet de résoudre sont de plus en plus nombreux et complexes.

Parmi ces problèmes, certains correspondent à des sollicitations exceptionnelles que la structure ne rencontrera qu'un nombre limité de fois au cours de son fonctionnement (par exemple la résistance au choc d'un véhicule, la résistance d'un bâtiment à des conditions météorologiques ou sismiques exceptionnelles...). Cependant, lorsque l'on s'intéresse aux conditions classiques de fonctionnement en "marche-arrêt", les sollicitations sont souvent répétitives. C'est le cas, par exemple, des systèmes qui subissent des conditions physiques différentes entre leur phase de fonctionnement et leur phase d'arrêt (par exemple les moteurs d'avions ou d'automobiles dont la température varie fortement en phase de fonctionnement, les ailes d'un avion qui subissent des sollicitations très différentes entre les phases de vols et les phases au sol...).

Dans le cas des sollicitations cycliques, le concepteur devra s'assurer de la résistance de la structure et surtout du maintien des fonctionnalités de la pièce après la répétition de ces sollicitations. C'est le dimensionnement à la fatigue.

En effet, bien que la pièce puisse être dimensionnée pour résister à un cycle de chargement, la répétition de tels cycles crée des phénomènes physiques particuliers qui altèrent sa résistance et son bon fonctionnement. Il est donc nécessaire de garantir la tenue de la pièce à la répétition de ces cycles.

Au cours de la vie d'un véhicule automobile, le moteur est sollicité quelques dizaines de milliers de fois par des cycles de fonctionnement. Dans le cadre du dimensionnement mécanique, l'un des objectifs des architectes moteur est d'assurer la tenue mécanique de l'ensemble des pièces et de garantir leurs fonctionnalités au cours de ces cycles. Pour assurer cette conception, tout en diminuant les délais et les coûts, ils s'appuient sur la simulation numérique pour optimiser l'architecture des pièces.

Cependant il est nécessaire que l'approche numérique soit suffisamment prédictive pour garantir cette bonne tenue en service dès les phases de conception virtuelle. C'est pourquoi, le groupe PSA Peugeot Citroën a développé et mis en place, avec la collaboration du Laboratoire de Mécanique des Solides, une filière de dimensionnement à la fatigue des pièces du moteur soumises à des températures élevées qui permet de rendre l'approche numérique suffisamment prédictive pour orienter les concepteurs.

Après une courte introduction pour décrire les phénomènes de fatigue, nous présenterons différents schémas de dimensionnement développés dans la littérature pour la fatigue thermomécanique et nous montrerons leurs intérêts respectifs. Dans un troisième paragraphe, nous développerons l'approche de dimensionnement utilisée par PSA pour le dimensionnement des pièces moteur soumises à la fatigue thermomécanique tels que les collecteurs d'échappement et les culasses.

1. Introduction aux phénomènes de fatigue

La fatigue est un phénomène physique que l'on rencontre dans les structures soumises à des sollicitations thermiques et/ou mécaniques variables. Elle se caractérise par une détérioration des propriétés mécaniques du matériau au cours des cycles de chargement, jusqu'à entraîner la fissuration ou la rupture de la pièce.

Elle est très largement rencontrée dans les différents domaines du génie mécanique (aéronautique, automobile, ferroviaire, nucléaire...) et reste un point clé du dimensionnement mécanique des structures, car elle représente une grande partie des ruptures de pièces en service.

Les phénomènes de fatigue peuvent être mis en évidence d'une manière très simple, par exemple, par un essai au cours duquel une éprouvette subit des cycles d'efforts, à une fréquence fixe. On fait alors varier le niveau d'effort appliqué dans l'éprouvette et on note le nombre de cycles à rupture. Si l'on reporte ces valeurs dans un diagramme on obtient un diagramme semblable à celui de la figure 1. On le définit généralement sous le nom de courbe de Wöhler.

On distingue couramment pour les métaux trois types de comportements à la fatigue en fonction du nombre de cycles subis par le matériau lors de l'apparition de fissure macroscopique :

Si la structure subit un grand nombre de cycles (au-delà de 10^5 cycles) avant de rompre, on parle de fatigue polycyclique. La structure est en général sollicitée dans son domaine d'élasticité, où après quelques cycles élastoplastiques, elle reste dans un régime purement élastique.

Si la rupture de la structure intervient pour un nombre de cycles inférieur à 100000 cycles, on parle de fatigue oligocyclique. A chaque cycle, la structure est alors sollicitée au-delà de son domaine d'élasticité. Le cycle limite de la structure est alors élastoplastique ou élastoviscoplastique.

Au-delà de 10^7 cycles, on dit conventionnellement que la structure a atteint son domaine d'endurance illimitée. Aucune fissure de fatigue n'apparaîtra, quel que soit le nombre de cycles appliqués. Cependant, ce n'est qu'une limite conventionnelle qui reste souvent très mal définie.

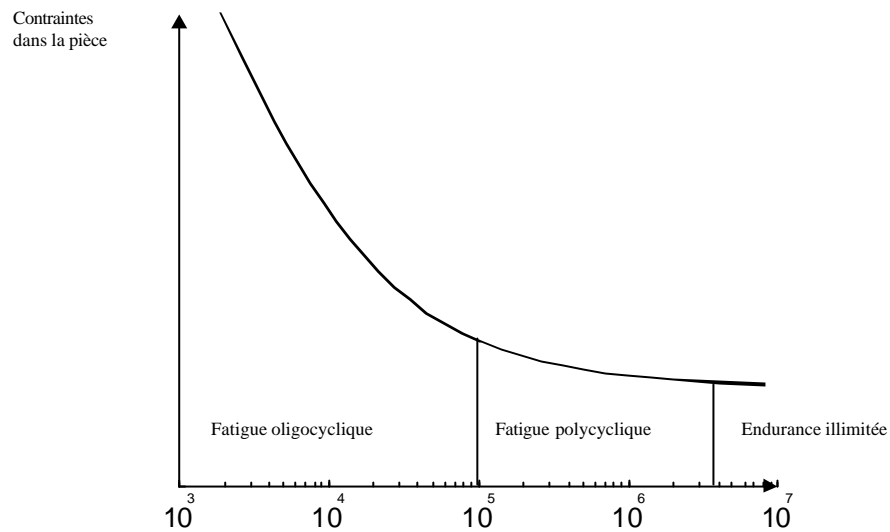


figure 1 : Courbe de Wöhler et distinction entre les différents types de fatigue

La fatigue polycyclique concerne un très grand nombre de structures industrielles. Pour dimensionner de telles structures, on s'appuie sur la simulation numérique avec généralement une modélisation élastique du comportement du matériau et l'utilisation de critères permettant de relier les variables mécaniques macroscopiques obtenues par le calcul à la durée de vie de la structure. Un critère de fatigue multiaxiale largement utilisé est celui de Dang Van [DANG VAN 73], [DANG VAN 99], mais on peut aussi citer ceux de Sines [SINES 59] ou de Crossland [CROSSLAND 56].

La fatigue oligocyclique prend une place de plus en plus importante dans la conception des structures car il est souvent nécessaire de faire travailler les matériaux au-delà de leur limite d'élasticité pour garantir une optimisation du poids des structures. Cela a été rendu possible grâce aux progrès des moyens numériques qui permettent maintenant de simuler le comportement non linéaire des matériaux et donc de prévoir la tenue de ce type de structures. Nous nous proposons, dans le paragraphe suivant de décrire les principes généraux de dimensionnement à la fatigue oligocyclique et particulièrement la fatigue thermomécanique que l'on rencontre notamment dans les culasses automobiles.

2. Dimensionnement à la fatigue oligocyclique

L'étude expérimentale de la fatigue oligocyclique a commencé dans les années 50 dans les domaines nucléaire et aéronautique avec notamment les travaux de Manson et Coffin qui ont donné les premières formulations permettant de relier la durée de vie d'une éprouvette à la déformation plastique observée.

Depuis, de nombreuses études sur la fatigue ont permis de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu. De plus, les progrès obtenus dans la caractérisation et la modélisation du comportement inélastique des matériaux, mais aussi dans la robustesse des algorithmes de calculs et de la puissance informatique disponible, ont permis de développer des méthodes de dimensionnement à la fatigue oligocyclique fiables, s'appuyant largement sur une approche numérique.

Ces méthodes se regroupent en général en deux types d'approches de dimensionnement qui sont assez différentes dans leur concept et qui induisent des filières de simulation très différentes.

La première s'appuie sur les travaux concernant l'endommagement de fluage initiés par Kachanov en 1958. Elle consiste à coupler la modélisation du comportement inélastique du matériau à celle de son endommagement. On peut se référer à [LEMAITRE-CHABOCHE 74] ou [BENALLAL-BEN CHEIK 87] pour une présentation plus détaillée et une illustration de ce type d'approche.

Au cours de la simulation des cycles de chargement, la réponse mécanique est influencée par l'évolution de l'endommagement dans chaque zone de la structure. Cette approche offre alors la possibilité de suivre l'évolution de l'endommagement de la structure au cours du chargement. La ruine de la structure est déterminée lorsque les paramètres d'endommagement dépassent une valeur seuil. Du point de vue de la modélisation numérique elle nécessite la simulation de l'ensemble des cycles jusqu'à la ruine de la structure.

Le couplage entre le comportement mécanique et l'endommagement rend le problème très fortement non-linéaire, ce qui conduit à une résolution parfois délicate et en tout cas très coûteuse en temps. De plus, l'identification de tels modèles reste délicate à effectuer de par la diversité des paramètres à déterminer et leur couplage.

La seconde approche considère l'influence de l'endommagement sur la réponse mécanique de la structure négligeable. Il est alors possible de découpler la modélisation de l'endommagement de celle du comportement du matériau.

La simulation de la prévision de la tenue en fatigue est alors effectuée en deux étapes : on recherche dans un premier temps la réponse mécanique de la structure jusqu'à un état stabilisé représentatif en ne prenant en compte que le comportement inélastique du matériau, puis on évalue la durée de vie de la structure par un post traitement de la réponse mécanique à partir de l'intégration d'une loi d'endommagement sur l'ensemble du trajet de chargement.

Dans [SERMAGE-LEMAITRE-DESMORAT 00], les auteurs comparent ces deux approches de dimensionnement dans le cas d'une éprouvette soumise à un chargement mécanique biaxial et à un chargement thermique. Les auteurs en concluent que les deux approches proposent des résultats relativement prédictifs par rapport aux essais effectués. Cependant, l'approche couplée entraîne des temps de calcul nettement supérieurs à ceux de l'approche découplée. Ce problème rencontré dans le cas d'une éprouvette devient particulièrement délicat pour simuler des structures industrielles.

Dans [CHABOCHE 97], l'auteur décrit l'approche découplée comme la plus répandue dans le dimensionnement des structures industrielles. Cependant, la littérature propose de nombreuses versions, en fonction des modèles de comportement étudiés mais aussi en fonction des différentes modélisations de l'endommagement retenues et donc des différents critères de fatigue utilisés. Pour illustrer cette approche, nous présenterons, dans le paragraphe suivant, certains critères généralement utilisés avant de décrire l'application d'une telle démarche de dimensionnement sur les culasses automobiles.

3. Critères de prévision de durée de vie en fatigue thermomécanique

Nous avons vu précédemment que dans le cadre d'une approche de dimensionnement découplant la modélisation du comportement du matériau de son endommagement, il est nécessaire de déterminer la réponse stabilisée de la structure, avant de la post-traiter pour en prédire la durée de vie à travers un critère de fatigue. Les critères utilisés permettent de relier les grandeurs mécaniques de la structure lors du cycle stabilisé, à sa durée de vie.

Il est tout d'abord nécessaire de définir la durée de vie de la structure. Dans le cadre de notre étude, elle est définie comme le nombre de cycles appliqués à la structure avant que l'influence d'une fissure ne dépasse le volume élémentaire représentatif et agisse donc sur les champs mécaniques globaux de la structure, entraînant la perte fonctionnelle de la structure.

Le premier critère de dimensionnement à la fatigue oligocyclique a été proposé par Manson [MANSON 53] et Coffin [COFFIN 53]. Dans le cas d'essais uniaxiaux sur des éprouvettes soumises à des déformations imposées, ils utilisent l'amplitude des déformations plastiques comme grandeur caractéristique de l'endommagement par fatigue.

Ils définissent alors la relation suivante, qui lie par une loi en puissance, l'amplitude de déformation plastique à la durée de vie de la structure.

$$\Delta \epsilon^P . (N_R)^\beta = C \quad (1)$$

Où l'on note :

$\Delta \epsilon^P$, l'amplitude de déformation plastique sur un cycle stabilisé,

N_R , le nombre de cycle à la ruine de la structure,

β et C des constantes caractéristiques du matériau dépendant de la température.

Ce critère a été largement utilisé pour des sollicitations uniaxiales isothermes.

Pour traiter le problème anisotherme, Taira, dans [TAIRA 73] propose de rajouter un terme fonction de la température pour rendre les paramètres β et C indépendants de la température.

$$\lambda(T) . [\Delta \epsilon^P . (N_R)^\beta] = C \quad (2)$$

Cependant, l'utilisation de tels critères dans le cas de structures tridimensionnelles complexes reste difficile car ils ne font intervenir que des grandeurs uniaxiales. De plus, dans le cas de chargement anisotherme, la définition d'une amplitude de déformation plastique reste délicate.

Comme ce type de relation ne fait pas intervenir les effets du temps (i.e les effets de la viscosité du matériau) indispensables dans la description de la fatigue thermomécanique, Halford et al. [HALFORD-HIRSCHBERG-MANSON 73] ont proposé de tenir compte des effets

de l'endommagement de fluage et de l'endommagement de fatigue plastique avec la méthode du Strain Range Partitioning.

Le principe consiste à distinguer, dans la réponse mécanique d'une structure, différents comportements élémentaires d'endommagement en fonction des phénomènes physiques mis en jeu. Ces comportements identifiés préalablement de manière indépendante sont alors cumulés en fonction de leur part respective dans le cycle étudié.

Ces comportements élémentaires correspondent aux différentes combinaisons possibles d'endommagement plastique et de fluage, tant en traction qu'en compression. Chaque comportement est caractérisé seul par des essais sur éprouvettes pour déterminer pour chacun d'eux une loi d'endommagement du type :

$$N = C \Delta \epsilon_{in}^{\gamma}$$

Où l'on note :

$\Delta \epsilon_{in}$, l'amplitude de déformation inélastique sur un cycle stabilisé,

N , le nombre de cycles avant la ruine de la structure,

γ et C des constantes caractéristiques du matériau.

Dans un cycle tel que celui représenté sur la figure 2, on distingue dans l'amplitude de déformation totale, les déformations correspondant aux comportements élémentaires cités précédemment.

On obtient alors quatre types de déformations que l'on peut écrire sous la forme :

ϵ_{ij} avec $i, j = p$ ou c

i représentant un chargement en traction et j en compression

p représentant la part de plasticité et c la part de fluage.

Dans la réponse de la structure, on distingue alors chaque comportement par la partition des déformations (ϵ_{ij}) comme définie précédemment, puis on cumule les parts de chaque dommage (N_{ij}) pour connaître le nombre de cycles à rupture de la structure (N_R) :

$$\frac{1}{N_R} = \sum_{i,j} \left(\frac{\Delta \epsilon_{ij}}{\Delta \epsilon_{in}} \right) \frac{1}{N_{ij}} \quad (3)$$

Chaboche dans [CHABOCHE 97] illustre la partition des déformations dans le cas d'un cycle complexe par la figure 2. Cette partition est difficile à mettre en place, particulièrement dans les cas où la température évolue rapidement et l'auteur indique que cela s'avère quasiment impossible dans le cas des structures tridimensionnelles.

Ces différents critères, bien que ne convenant pas à notre application, montrent que le cycle stabilisé est une notion recherchée dans la plupart des approches de dimensionnement.

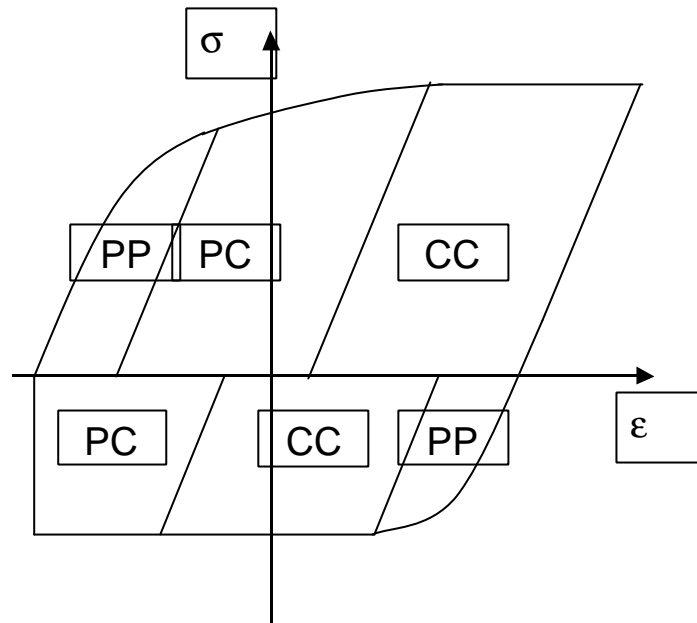


figure 2 : Partition d'un cycle complexe selon la méthode SRP.
d'après [CHABOCHE 97]

D'autres auteurs (Ostergren, Skelton [SKELTON 98]) proposent comme grandeur caractéristique de la fatigue, l'énergie dissipée au cours du cycle stabilisé, c'est à dire dans le cas unidimensionnel, l'aire du cycle contrainte-déformation stabilisé.

L'hypothèse commune à ces auteurs est de considérer qu'à chaque cycle la structure accumule une certaine quantité d'énergie qui participe à son endommagement. Lorsque cette énergie cumulée dépasse une valeur seuil, les fissures de fatigue se propagent à travers la structure, entraînant rapidement sa ruine.

Nous verrons dans le paragraphe suivant, l'efficacité de ce type de critère en énergie dans le dimensionnement à la fatigue thermomécanique et une illustration de son intégration dans une filière numérique de dimensionnement telle que celle des culasses.

4. Dimensionnement des culasses à la fatigue thermomécanique

4.1 Description d'une culasse

La culasse est la partie haute du moteur et délimite la chambre de combustion avec le piston et le cylindre. Elle est montée et serrée sur le bloc moteur ; l'étanchéité de la chambre de combustion est assurée par le joint de culasse.

Elle permet le fonctionnement correct des soupapes d'admission et d'échappement, le maintien de l'injecteur, assure le support de l'arbre à cames et du système de distribution des soupapes et définit les conduits des gaz frais (conduits d'admission) et des gaz brûlés (conduits d'échappement).

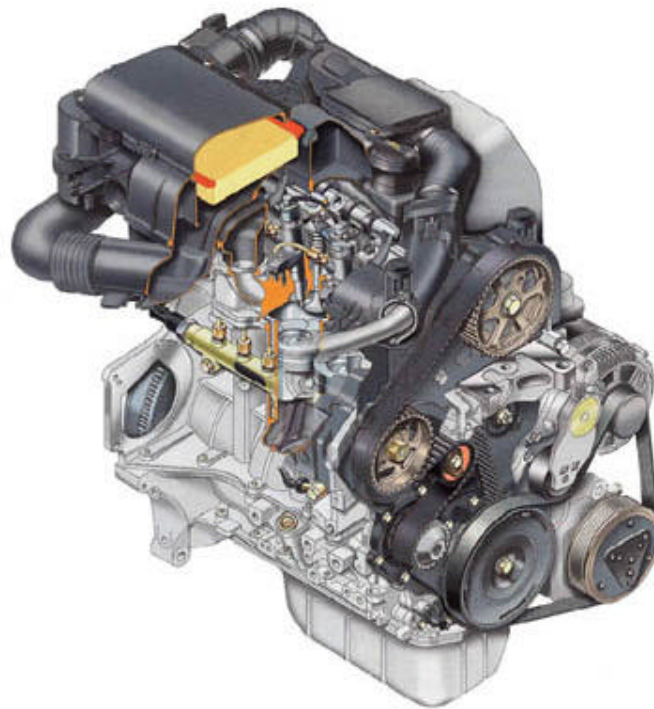


figure 3 : vue éclatée du moteur 1,4l HDI

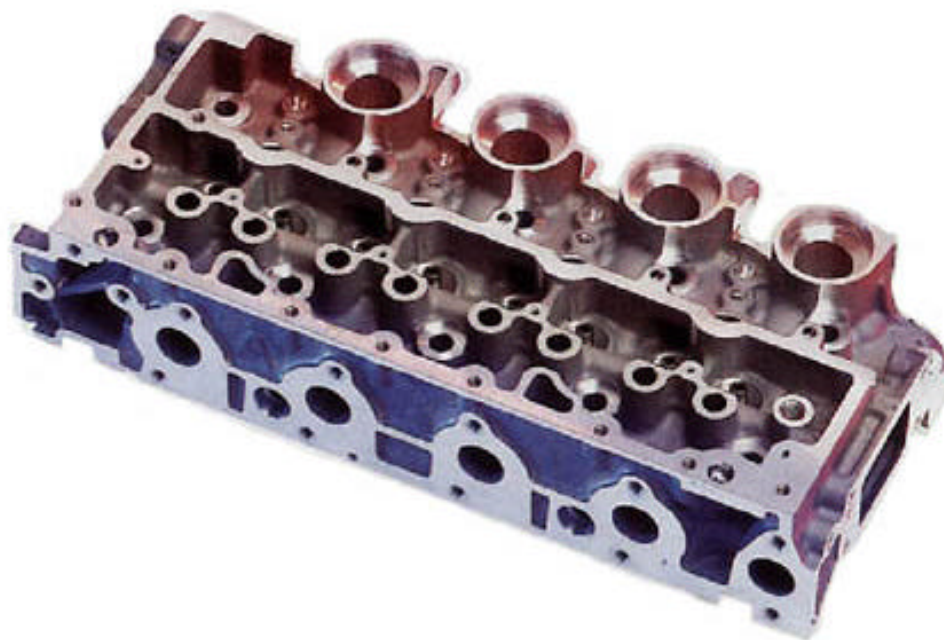


figure 4 : culasse du moteur 1,4HDI

La culasse subit de fortes variations thermiques dues à la combustion du carburant dans la chambre et à la circulation des gaz brûlés. Les températures dans la matière peuvent alors atteindre près de 300°C. Afin d'assurer son intégrité il est nécessaire de la refroidir par un système complexe de circulation de liquide de refroidissement.

Dans le cas des moteurs Diesel à injection directe (HDI) du groupe PSA Peugeot Citroën, la culasse est constituée d'un alliage d'aluminium AS7G03 ou A356. Cet alliage est constitué principalement d'aluminium (~93%) mais aussi de silicium (~7%) et de magnésium (~0.3%) [BOUSSAC 98].

4.2 Approche globale de dimensionnement et application aux culasses

Les outils de simulation numérique prennent une place prépondérante dans le processus de développement des pièces du groupe moto-propulseur (GMP). Ils interviennent tout au long du développement afin d'orienter et de confirmer l'architecture du moteur avant que celle-ci soit validée par des prototypes testés sur bancs d'essais et ainsi garantir le maintien des fonctionnalités du moteur au cours de sa vie. Parmi les spécifications du cahier des charges, la résistance aux phénomènes de fatigue thermomécanique prend une place de plus en plus importante avec les différentes évolutions technologiques récentes : les systèmes d'injection directe Diesel nécessitent notamment des températures et des pressions de plus en plus élevées dans la chambre de combustion sollicitant très sévèrement les alliages d'aluminium.

Le dimensionnement à la fatigue thermomécanique des culasses automobiles doit être suffisamment robuste prédictif pour garantir une architecture optimale et fiable dès les premières phases de conception. Cependant les difficultés rencontrées dans la modélisation des phénomènes mis en jeu sont telles que cela reste encore l'objet de nombreuses études ([TAKAHASHI 99], [DEJACK 02], [AZZOUZ-CAILLETAUD-FOERCH-MORIN-QUILICI-RAGOT 02] [NICOLEAU BOURLES-EL MAYAS-MASSINON-CAILLETAUD 02]) afin d'en améliorer la robustesse et la prédictivité.

Au cours des dernières années, une approche de dimensionnement à la fatigue thermomécanique a été développée par PSA Peugeot Citroën et le Laboratoire de Mécanique des Solides pour améliorer la prédictivité et la robustesse du dimensionnement des pièces du groupe moto-propulseur.

Cette démarche s'appuie sur quatre points-clés :

- Définition d'un chargement statistiquement représentatif du fonctionnement en clientèle de la pièce.
- Modélisation du comportement du matériau dans les conditions de sollicitation de la structure.
- Simulation thermomécanique de la structure en un temps le plus proche possible des exigences de bureau d'études.
- Dimensionnement à la fatigue par l'utilisation de critères appropriés.

Pour assurer la cohérence de l'approche, les points précédents doivent être développés à un niveau de précision homogène. Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter ces quatre points dans un contexte général de dimensionnement à la fatigue puis les

illustrer par leur mise en application dans le cas de la fatigue thermomécanique des pièces de moteur.

4.2.1 Définition du chargement

Il est nécessaire pour développer une approche numérique de dimensionnement de définir un chargement suffisamment représentatif des sollicitations rencontrées par la pièce en utilisation.

Chaque utilisateur faisant un usage unique de son véhicule, il est impossible de connaître l'ensemble des cas de chargements possibles des pièces du véhicule. Afin de définir un cahier des charges unique capable de tenir compte de l'ensemble des utilisations, des méthodes dites « contrainte-résistance » sont employées.

D'une part, on détermine, à partir de grandeurs mécaniques accessibles lors de mesures pendant des enquêtes clientèle (accélération, température des gaz rejetés...), les sollicitations de la structure en fonction de chaque utilisateur. Par des approches de cumul de dommage et d'équivalence fatigue, on détermine ensuite un couple (effort équivalent, nombre de cycles) qui sera équivalent de l'endommagement produit par chaque utilisation. On obtient alors la distribution de sévérité de la clientèle.

D'autre part, des analyses statistiques de suivi de production permettent de déterminer les dispersions de résistance des pièces dues au process ou à l'état de la matière.

Une approche probabiliste permet alors de définir un client de référence associé à un niveau de risque de défaillance accepté. Ce client référence représente une sollicitation unique qui sera utilisée tant pour le dimensionnement numérique que pour la validation expérimentale [THOMAS-PERROUD-BIGNONNET-MONNET 98].

Dans le cas des culasses, le paramètre fondamental de dimensionnement est l'évolution de la température au cours du cycle. En effet, c'est l'évolution des gradients thermiques et du comportement du matériau en fonction de la température qui vont piloter les champs mécaniques de la structure. L'équivalence fatigue nous donne alors un cycle thermique représentatif qui servira de référence à la simulation et qui sera appliqué sur bancs d'essais pour valider physiquement la structure [CHARKALUK 01].

Cette approche d'équivalence fatigue dans le cadre du GMP (Groupe Moto Propulseur) est en cours de développement. Pour l'instant, le chargement cyclique thermique appliqué sur banc d'essai est supposé suffisamment représentatif pour être utilisé comme chargement dimensionnant dans la filière numérique.

Afin de diminuer les temps de calcul, l'hypothèse d'un découplage entre le calcul thermique et le calcul mécanique est faite. Plus précisément, on néglige les effets du comportement mécanique de la structure sur son comportement thermique. Cela se justifie notamment par l'importance du chargement thermique devant les quantités mises en jeu lors de la dissipation thermique issue de la plastification de certaines zones de la culasse. Cependant, l'influence de la température sur le comportement mécanique du matériau est prise en compte par des paramètres du comportement mécanique dépendant de la température.

Un calcul thermique permet de déterminer les champs de température et leur évolution transitoire dans la culasse au cours du cycle. Les données d'entrée sont les coefficients d'échanges thermiques entre la culasse et son environnement proche (combustion, gaz

brûlés, circuit de refroidissement...) provenant de simulations 3D en mécanique des fluides. Les champs thermiques provenant de cette simulation constituent alors le chargement principal pour le calcul mécanique.

4.2.2 Modélisation du comportement du matériau

La modélisation du comportement du matériau ne doit pas être considérée comme uniquement liée aux caractéristiques du matériau mais doit être adaptée à l'ensemble de la filière de dimensionnement en fonction des informations recherchées.

En fonction de la prise en compte couplée ou non de la réponse mécanique de la structure et de son endommagement, les caractéristiques du modèle seront très différentes. Dans le premier cas, la caractéristique principale du modèle sera de représenter au mieux l'évolution de la réponse de la structure en fonction de l'évolution de l'endommagement au fur et à mesure des cycles, sans s'attacher à modéliser l'évolution cyclique de manière précise alors que dans une modélisation découplée il est nécessaire d'être le plus représentatif possible du comportement stabilisé de la structure sans s'attacher à le représenter dans la phase transitoire. Celle-ci est négligeable car elle représente quelques dizaines de cycles alors que la structure est soumise à plusieurs dizaines de milliers de cycles.

Pour mettre en évidence les caractéristiques du comportement du matériau à la fatigue, nous nous proposons de suivre l'évolution d'une éprouvette soumise à des cycles de chargement en extension-contraction, pilotés en déplacements. Nous observons que l'amplitude de l'effort ne reste pas constante au cours des cycles. La plupart des matériaux voient alors leurs propriétés d'écrouissage varier au cours des cycles (figure 5). Selon les matériaux, il peut y avoir adoucissement ou durcissement cyclique selon que l'effort diminue ou augmente au cours des cycles [FRANÇOIS-PINEAU-ZAOUI 95].

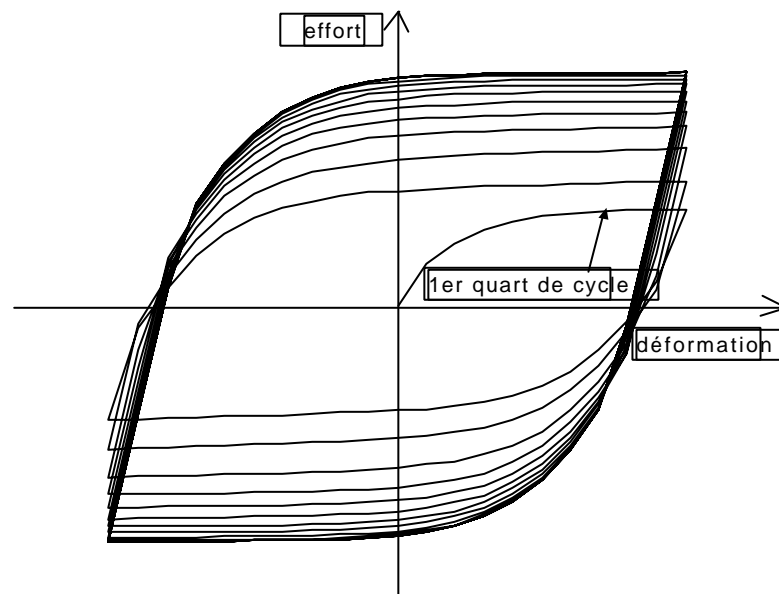


figure 5 : Evolution des cycles contrainte-déformation pour une éprouvette soumise à un chargement cyclique de déformation alternée

Si l'on suit l'évolution de l'amplitude de contrainte dans l'éprouvette en fonction des cycles, il est possible de distinguer trois phases dans la vie de l'éprouvette comme cela est représenté sur la figure 6 :

- Pendant les premiers cycles (jusqu'à N_{stab} sur la figure 6), l'évolution de l'effort dans la structure est particulièrement rapide. La structure s'accommode sous la sollicitation appliquée. C'est la phase d'adoucissement ou de durcissement cyclique.
- La seconde phase (entre N_{stab} et N_f) représente la plus grande partie de la vie de la structure. On y observe un comportement stabilisé ou pseudo-stabilisé. On parle alors d'adoucissement lent car l'effort observé tend à diminuer au fur et à mesure de l'apparition de microfissures, qui restent cependant limitées à la taille du volume élémentaire représentatif.
- La troisième phase est la ruine de la structure. C'est une phase généralement très rapide pendant laquelle une fissure qui s'est amorcée dans la phase précédente va se propager au-delà du volume élémentaire représentatif. La structure va alors rapidement perdre ses fonctionnalités.

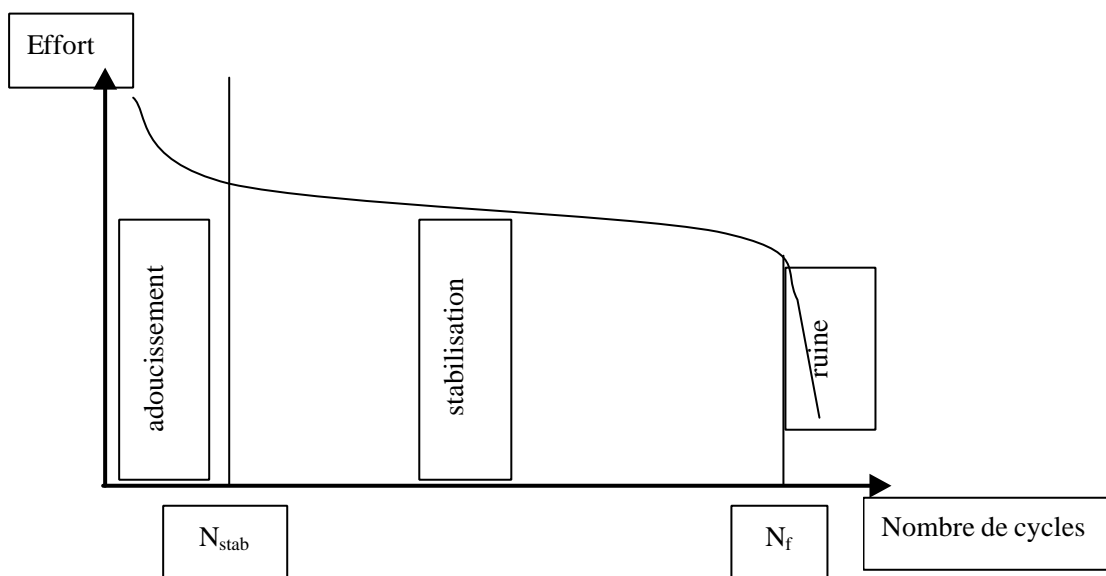


figure 6 : représentation de la durée de vie d'une structure et de ses trois phases caractéristiques

Dans l'approche de dimensionnement développée, nous cherchons à simuler le comportement de la structure à la fin de la phase d'accommodation (N_{stab}). Cette réponse sera suffisante pour caractériser le comportement en fatigue de la structure. Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle qui soit représentatif de l'état stabilisé du matériau même s'il ne représente pas parfaitement le comportement transitoire des premiers cycles tant sur éprouvette que sur structures.

Dans le cas des alliages d'aluminium utilisé pour les culasses des moteurs HDI, le modèle utilisé comporte volontairement un nombre limité de paramètres caractéristiques afin de faciliter leurs identifications. Cependant il représente les différentes propriétés de

l'alliage qui ont pu être mises en évidence à travers divers essais de caractérisation [VERGER 02].

C'est un modèle élastoviscoplastique [LEMAITRE-CHABOCHE 96]. Il obéit au formalisme des matériaux standards généralisés [HALPHEN-NGUYEN 75]. Ses caractéristiques principales sont :

- un comportement purement élastique pour les faibles charges,
- une partition des déformations en déformation élastique et déformation inélastique,
- une fonction de charge de type Von Mises,
- un écrouissage cinématique linéaire,
- une loi de viscosité en puissance de type Norton-Hoff,
- une prise en compte du comportement anisotherme avec des paramètres variant en fonction de la température.

La figure 7 représente le schéma rhéologique du modèle utilisé. L'implémentation numérique de ce modèle sera détaillée dans le chapitre III.

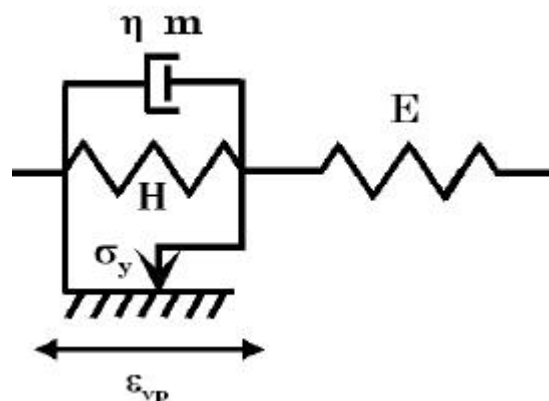


figure 7 : représentation rhéologique du modèle de comportement utilisé dans le cas des alliages d'aluminium

L'identification de ce modèle comportant cinq paramètres dépendant de la température est faite par contrôle optimal à partir d'un ensemble d'essais isothermes et anisothermes [VERGER-CONSTANTINESCU-CHARKALUK 00].

4.2.3 Simulation thermomécanique de la structure

Nous avons vu précédemment que seul l'état stabilisé de la structure est intéressant pour prédire la durée de vie d'une structure. Cependant, la détermination de cet état stabilisé reste un point délicat dans la simulation numérique malgré les progrès incessants en matière de puissance informatique.

Ces problèmes rassemblent de nombreuses difficultés qui rendent la résolution particulièrement coûteuse en temps de calcul, voire incompatible avec la réactivité nécessaire des bureaux d'études : non-linéarités de comportement, non-linéarités de

contact, maillages fins pour prendre en compte des gradients mécaniques ou thermiques dans la pièce, nombreux cycles avant d'atteindre un régime stabilisé...

Les méthodes classiques de résolution comme les méthodes incrémentales ne permettent pas toujours d'atteindre le résultat en des temps de calcul acceptables (plusieurs jours CPU sur calculateur). Dans l'approche globale, la stratégie consiste à essayer, lorsque c'est possible, d'adapter la résolution numérique aux caractéristiques du problème, tout en restant pertinent dans la représentativité des phénomènes physiques.

Différents algorithmes ont déjà été proposés pour résoudre certains problèmes particuliers en améliorant la rapidité des calculs. Nous pouvons citer la méthode stationnaire proposée initialement par [NGUYEN-RAHIMIAN 81] dans le cadre de la simulation de propagation de fissure. Elle a été ensuite développée et appliquée pour la simulation de passages répétés de chargements mécaniques ou thermomécaniques mobiles sur des structures allongées. Son utilisation pour la simulation thermomécanique du roulement sur les rails de chemins de fer a permis de mettre au point une démarche prédictive de dimensionnement à la fatigue à grand nombre de cycles [MAÏTOURNAM 89] [DANG VAN-MAÏTOURNAM 02].

Une étude récente a permis l'extension de ces algorithmes pour la simulation transitoire de chargements mobiles sur des structures axisymétriques. Son application pour le problème du frein automobile a abouti à la simulation tridimensionnelle de phases complètes de freinage, ce qui offre un grand intérêt pour le dimensionnement à la fatigue des disques de freins [NGUYEN TAJAN 02].

Actuellement, les tailles de maillage des culasses dépassent le million de degrés de liberté. Les simulations, effectuées dans [VERGER 02], qui ont validé l'approche de dimensionnement les culasses, ont été obtenues par un calcul incrémental classique dans le code de calcul par éléments finis Abaqus [HIBBITT-KARLSON-SORENSEN 98].

Cependant, les temps de restitution des calculs restent pénalisants pour une utilisation en bureaux d'études. C'est pourquoi, nous avons développé une méthode numérique alternative, adaptée aux structures soumises à des chargements cycliques que nous présenterons dans le chapitre III.

4.2.4 Dimensionnement à la fatigue

La quatrième étape de cette approche globale est la modélisation de l'endommagement du matériau et sa prise en compte dans un critère de fatigue.

Nous avons vu, dans le paragraphe 2, différents critères applicables pour la fatigue oligocyclique. Cependant, dans le cadre de structures soumises à des chargements thermomécaniques complexes, le critère de fatigue utilisé doit nécessairement tenir compte du caractère multiaxial et anisotherme de la réponse mécanique de la structure. Les critères énergétiques semblent alors les plus pertinents pour la description de la fatigue thermomécanique car ils ne font intervenir que des grandeurs macroscopiques, multiaxiales et qui prennent en compte la température de manière intrinsèque.

L'énergie dissipée par cycle est utilisée par différents auteurs [SKELTON 98], [TAKAHASHI 99], comme paramètre représentatif de l'endommagement de fatigue. Elle se définit comme suit :

$$\Delta\omega = \int_{\text{cycle}} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}} \, dt \quad (4)$$

Le principe de ce type d'approche est de considérer qu'à chaque cycle, la structure dissipe de l'énergie qui participe à son endommagement. Cette énergie se cumule jusqu'à atteindre une valeur critique (W_R) qui entraîne alors la ruine de la structure.

On peut toutefois remarquer que l'énergie cumulée jusqu'à rupture n'est pas constante, mais dépend du nombre de cycles à rupture selon une loi exponentielle croissante :

$$W_R = C \cdot N_R^\alpha \quad (5)$$

L'hypothèse faite dans [CHARKALUK 99] est de considérer la valeur de l'énergie dissipée au cours des cycles de la phase de stabilisation comme relativement constante et suffisamment représentative de l'endommagement global de la pièce. Comme cette phase représente la plus grande part de la durée de vie de la structure, il est possible de faire une estimation de l'énergie accumulée pendant la vie de la structure par l'équation :

$$W_R = N_R \cdot \Delta\omega_{\text{stab}} \quad (6)$$

où :

$\Delta\omega$ est l'énergie dissipée au cours du cycle stabilisé,

W_R est l'énergie accumulée jusqu'à la ruine de la structure,

N_R est le nombre de cycles atteint avant la ruine de la structure.

En reportant l'équation (6) dans (5), on obtient alors l'écriture d'un critère de fatigue définissant le nombre de cycles à rupture en fonction de la densité d'énergie dissipée au cours du cycle stabilisé :

$$N_R^\beta \cdot \Delta\omega_{\text{stab}} = C \quad (7)$$

Les études de Charkaluk et Constantinescu [CHARKALUK 99] [CHARKALUK-CONSTANTINESCU 00] ont montré que ce critère permet d'estimer d'une manière robuste et prédictive la durée de vie d'une structure en fonte. Des corrélations calculs-essais de collecteurs d'échappement ont validé ce critère, tant au niveau de la localisation des zones susceptibles de se fissurer à partir d'une simulation par éléments finis (comme indiqué sur la figure 8) qu'au niveau de l'estimation de la durée de vie de la structure.

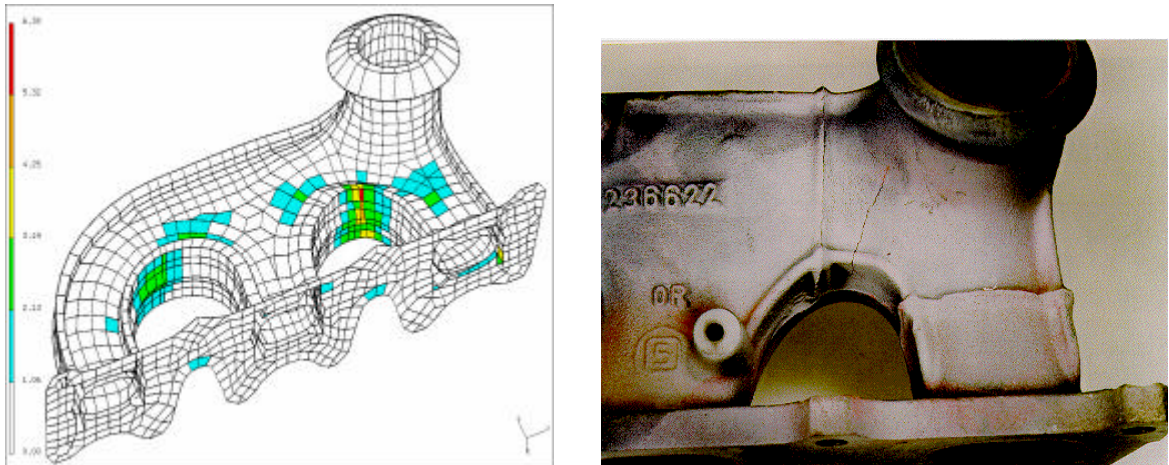


figure 8 : prévision de la fissuration de fatigue sur collecteur d'échappement.
d'après [CHARKALUK 99]

Cette approche a été appliquée dans le cas de la fatigue thermomécanique des culasses, en alliage d'aluminium ([THOMAS-VERGER-BIGNONNET-MARTIN BORRET 02], [VERGER 02]). Des comparaisons entre les durées de vie estimées par calcul et celles réellement atteintes lors de différents essais unidimensionnels (essais de fatigue isotherme oligocyclique, essais de fatigue anisotherme uniaxiale) mais aussi sur des culasses prototypes ont montré une bonne prédictivité de ce type de critère, comme illustré sur la figure 9.

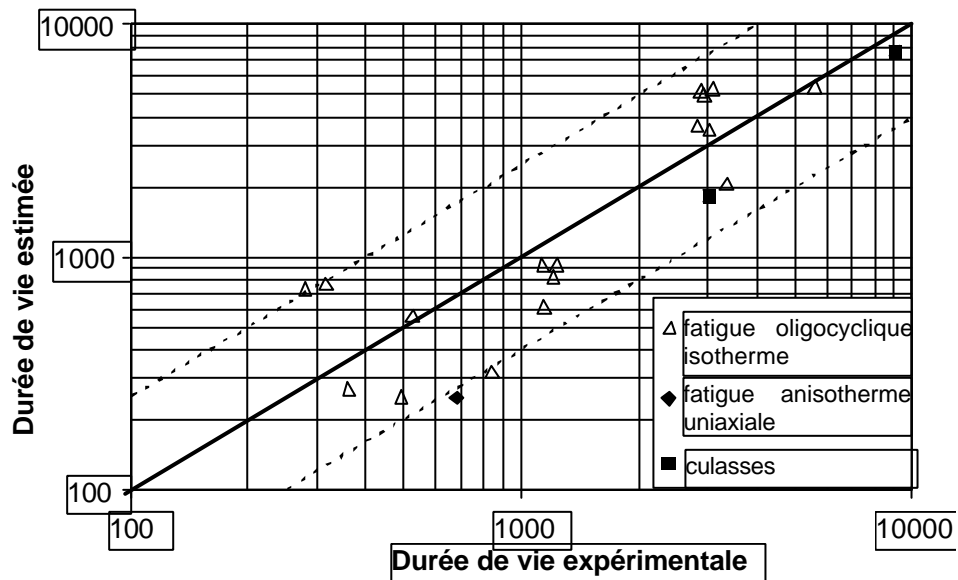


figure 9 : comparaison des durées de vie estimées et expérimentales sur éprouvettes et sur culasses en alliage AS7G03. d'après [VERGER 02]

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche globale de dimensionnement à la fatigue suffisamment prédictive et robuste pour être employée lors des phases de conception des pièces du GMP. Celle-ci se décline en quatre points, développés à un niveau de précision homogène afin d'assurer la robustesse de l'approche :

- chargement thermomécanique cyclique représentatif des sollicitations vues par la structure au cours de sa vie ;
- modélisation du matériau représentative de son comportement dans la structure ;
- résolution numérique pour déterminer la réponse stabilisée de la structure, si elle existe ;
- définition d'un critère de fatigue à partir de l'énergie dissipée au cours du cycle stabilisé.

Sa mise en place dans le cadre du dimensionnement à la fatigue thermomécanique des pièces de moteurs automobiles comme les culasses ou les collecteurs d'échappement a montré le caractère prédictif de ce type d'approche.

Cependant, la résolution numérique peut s'avérer coûteuse en temps de calcul pour simuler des structures très larges. Nous proposerons dans le chapitre III, une méthode numérique alternative aux techniques qui s'insère dans cette approche.

Chapitre II

Structures sous chargement cyclique : modélisation numérique

Nous avons vu dans le précédent chapitre, la possibilité de dimensionner, par une filière numérique appropriée, des structures aussi complexes que les culasses. Ce dimensionnement s'appuie sur la détermination numérique de la réponse stabilisée de la structure soumise à un chargement cyclique. Cependant, cette réponse asymptotique reste difficile à déterminer par des techniques de simulations classiques, notamment à cause des temps de calculs nécessaires.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux techniques existantes permettant la détermination de la réponse asymptotique. Dans un premier temps, nous précisons la définition de cet état asymptotique et ses conditions d'existence, démontrées pour certains modèles de comportement. Nous verrons ensuite, différentes techniques de simulation qui permettent de déterminer cet état limite. La plus générale est la méthode incrémentale qui permet de simuler la succession de cycles du chargement jusqu'à l'éventuelle stabilisation du comportement de la structure. Nous présenterons ensuite la méthode à grand incrément de temps proposée par Ladevèze et al., qui bien que initialement destinée à résoudre des problèmes généraux, présente une stratégie adaptée aux chargements cycliques. Nous décrirons ensuite des méthodes adaptées aux chargements cycliques telles que la méthode du saut de cycle, l'analyse simplifiée développée par Zarka et al. et enfin une approche récente basée sur une approche de minimisation par contrôle optimal.

1. Réponse asymptotique d'une structure

L'étude du comportement asymptotique d'une structure sollicitée par un chargement cyclique décrit son comportement lorsque le temps tend vers l'infini. En écartant le cas trivial où la structure reste dans son domaine élastique, on distingue trois types de réponse : l'adaptation, l'accommodation et le rochet.

Adaptation :

L'adaptation correspond à un état asymptotique stabilisé au cours duquel les déformations plastiques tendent vers une valeur constante. La réponse de la structure est alors purement élastique comme représentée sur la figure 10. Cela peut aussi se définir en terme d'énergie totale dissipée au cours de l'ensemble du chargement, qui reste bornée lorsque le temps tend vers l'infini.

Cela s'écrit pour un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} (\sigma(M, t) - C \dot{\epsilon}^P(M, t)) : \dot{\epsilon}^P(M, t) dv dt \text{ est finie.}$$

Le comportement de fatigue lié à l'adaptation est en général de type fatigue polycyclique.

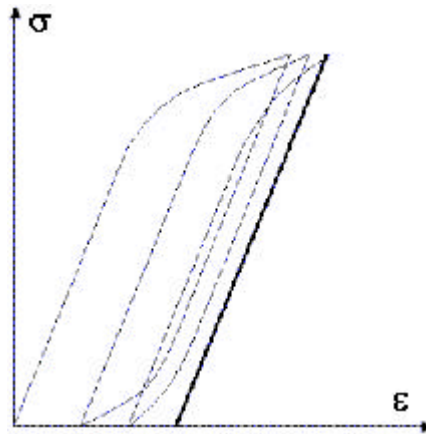


figure 10 : cycle contrainte déformation pour un état limite d'adaptation

Accommodation

L'accommodation correspond à un état limite stabilisé où les déformations plastiques restent bornées. En d'autres termes, la structure plastifie à chaque cycle mais, après un certain nombre de cycles, les déformations plastiques retrouvent à la fin du cycle les valeurs du début du cycle (figure 11). Elles sont alors périodiques. Si l'on raisonne en énergie dissipée, la valeur dissipée au cours de chaque cycle tend vers une constante.

Si l'on note ΔT , la période du chargement, on a, pour un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} \dot{\epsilon}^P(M, t) dt = 0$$

Le type de fatigue rencontré avec un comportement accommodé est en général de la fatigue oligocyclique.

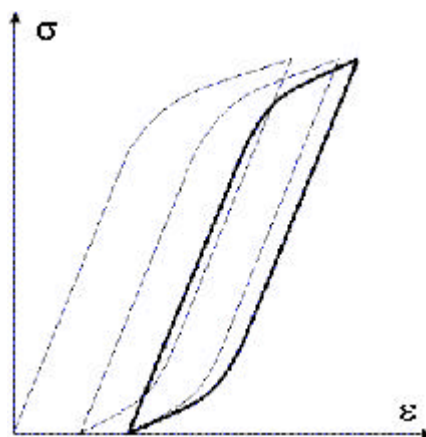


figure 11 : cycle contrainte déformation dans le cas de l'accommodation

Rochet :

En fonction du modèle de matériau utilisé et de la sollicitation appliquée, il est possible d'avoir un comportement qui ne se stabilise jamais. Les déformations plastiques augmentent alors à chaque cycle. Avec ce type de comportement, la ruine de la structure est atteinte très rapidement. Cependant, la technique de résolution employée doit mettre en évidence ce phénomène s'il apparaît dans le cas étudié.

Ce comportement n'est pas envisagé dans la plupart des cas industriels et particulièrement dans l'industrie automobile, de par la rapidité de la ruine de la structure. Cependant il existe des cas où cette situation est inévitable et la simulation du rochet est indispensable. Ce cas ne sera pas traité dans ce travail.

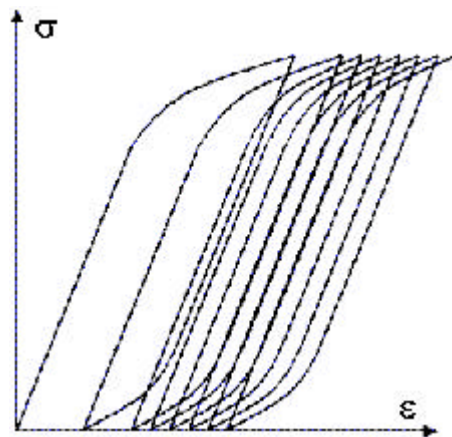


figure 12 : cycle contrainte déformation dans le cas du rochet

2. Analyse de l'état limite

La réponse asymptotique des structures élastoviscoplastiques soumises à des chargements cycliques est l'élément fondamental pour le dimensionnement à la fatigue : suivant que la structure s'adapte, s'accommode ou subit un phénomène de rochet, elle acceptera un nombre plus ou moins élevé de cycles de chargement avant sa ruine. Cette réponse asymptotique fait l'objet de nombreuses études de par son caractère fondamental dans le dimensionnement des structures. On peut citer les travaux de Melan [MELAN 36] qui donnent une condition suffisante pour l'adaptation d'une structure parfaitement plastique :

S'il existe un champ de contrainte auto-équilibré ρ^* , indépendant du temps, et un nombre $m > 1$ tels que, en tout point M :

$$\forall t, \quad f(m s^{el}(M, t) + \rho^*(M)) < 0$$

la structure s'adapte quel que soit son état initial.

Cette condition d'adaptation a été largement étendue à d'autres types de matériaux [MAIER 72], [MANDEL, 76] [NGUYEN 03] et reste un sujet de recherche considérable,

notamment pour le développement de méthodes numériques directes (par opposition à des méthodes incrémentales) permettant de définir les conditions d'adaptation d'une structure ([MAIER 01], [PONTER-CHEN 01]).

L'existence d'une réponse stabilisée a été démontrée pour des matériaux élastoplastiques parfaits et élastoviscoplastiques parfaits dont les caractéristiques sont indépendantes de la température ([FREDERICK-ARMSTRONG 66]). Halphen [HALPHEN 78] démontre, pour les matériaux standards généralisés plastiques et élastoviscoplastiques à écrouissage cinématique, tels que définis dans [HALPHEN-NGUYEN 75], dont les caractéristiques élastiques sont indépendantes de la température, l'existence d'une solution périodique en contraintes et en déformations.

3. Méthodes numériques

3.1 Position du problème

Le problème généralement considéré en mécanique se définit comme suit.

On considère une structure occupant un domaine Ω soumise à un chargement quelconque évoluant sur un intervalle de temps $[0, T]$.

Ce chargement peut se décomposer en efforts volumiques $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ appliqués dans Ω , en efforts surfaciques $\mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t)$ appliqués sur une partie $\partial_F\Omega$ de sa frontière, en déplacements imposés $\mathbf{U}^d(\mathbf{x}, t)$ appliqués sur la partie complémentaire $\partial_U\Omega$ de sa frontière ($\partial_F\Omega \cup \partial_U\Omega = \partial\Omega$ et $\partial_F\Omega \cap \partial_U\Omega = \emptyset$), et en un champ de température $\tau(\mathbf{x}, t)$ comme représentés sur la figure 13.

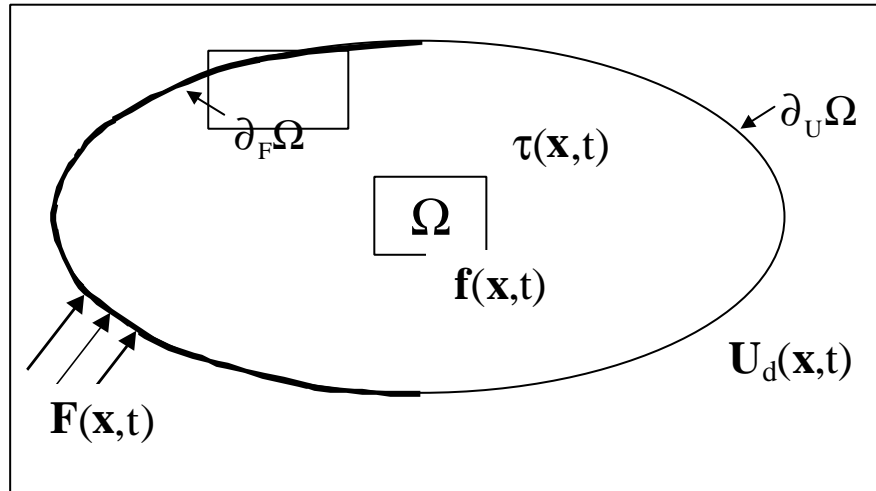


figure 13 : Illustration du problème mécanique

Les sollicitations appliquées à la structure étudiée entraînent une réponse (déplacements, déformations, déformations inélastiques, variables internes et contraintes) définie en chaque point de la structure et à tout instant de l'intervalle étudié que l'on se

propose de déterminer par la résolution des équations suivantes, dans l'hypothèse des petites perturbations [SALENÇON 98] :

$$\text{Equations d'équilibre} \quad \text{divs } (\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (8)$$

$$\text{Equations de compatibilité} \quad \varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad \text{dans } \Omega \quad (9)$$

$$\text{Conditions aux limites} \quad \mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_j = \mathbf{F}_i^d(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial_{F_i} \Omega \quad (10) \quad (a)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_i^d(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \partial_{U_i} \Omega \quad (b)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{s}^I(\mathbf{x})$$

$$\text{Conditions initiales} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^I(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad (11)$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}^I(\mathbf{x})$$

$$\text{Loi de comportement} \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \Psi'_0(\mathbf{e}(\mathbf{x}, \tau)) \quad \text{dans } \Omega \quad (12)$$

Où l'on note, au point de coordonnées \mathbf{x} à l'instant t :

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ les champs de déplacements

$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ les champs de contraintes

$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ les champs de déformations

$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ les variables internes, dépendant de la loi de comportement utilisée.

Ces équations définissent un problème continu, en temps et en espace. Pour sa résolution numérique, on est en général amené à le discrétiser en espace et en temps. La technique généralement utilisée pour discrétiser le problème en espace est la méthode des éléments finis. Pour le problème d'évolution temporelle, la technique la plus utilisée est la technique incrémentale.

3.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode la plus courante pour résoudre les problèmes s'appuyant sur un milieu continu en le remplaçant par un problème approché de dimension finie [ZIENKIEWICZ-TAYLOR 00]. Elle est très générale et peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes physiques (thermique, mécanique, électromagnétisme ...).

La discrétisation du milieu continu est faite en éléments de forme géométrique simple dont les sommets sont appelés nœuds. Les inconnues en tout point de la structure (problème continu) sont déterminées par une approximation fonction des valeurs des inconnues en un nombre fini de nœuds (problème discret).

Cette approximation se fait par des fonctions de formes définies sur chaque élément Ω^e , en fonction des n nœuds de l'élément Ω^e et des coordonnées ξ du point M dans le repère de référence de l'élément Ω^e , comme décrit dans l'équation (13) :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n N_i^e(\xi) u_i^e \quad (13)$$

Les déplacements nodaux sont donc les inconnues du problème discret. En notation matricielle, on peut noter l'équation (13) sous la forme :

$$\tilde{u} = N^e u_n^e \quad (14)$$

Les déformations, en tout point M de l'élément de référence, peuvent s'écrire en fonction des déplacements nodaux :

$$\varepsilon(u) = \nabla^s u = \nabla^s (N^e) u_n^e$$

$$\varepsilon = B^e u_n^e$$

B^e est appelé matrice élémentaire d'interpolation des déformations.

3.3 La méthode incrémentale

C'est la stratégie de résolution la plus commune dans les codes de calcul pour ce type de problème. Elle s'appuie généralement sur le principe de linéarisation de Newton-Raphson [ZIENKIEWICZ-TAYLOR 00].

Cependant, pour assurer une meilleure convergence, l'ensemble de l'évolution n'est pas résolu globalement en un seul problème, mais on discrétise l'intervalle d'étude en incrément de temps et de chargement. Sur chaque incrément on applique alors un schéma de résolution non linéaire de type Newton. Dans l'illustration de la méthode présentée ci-dessous, nous nous plaçons dans le cas d'un problème non linéaire de comportement.

L'intervalle d'étude est discrétisé en n instants t_i : $[0, \dots, t_i, \dots, T]$

L'hypothèse principale liée à cette approche est de ne vérifier les équations d'équilibre qu'aux instants t_i . Les solutions entre ces instants seront déterminées par interpolation linéaire, ce qui nécessite d'utiliser des incréments de temps assez petits.

Nous nous plaçons sur un intervalle $[t_i; t_{i+1}]$. En supposant que les solutions à l'instant t_i vérifient l'ensemble des équations, nous recherchons les solutions du problème à l'instant t_{i+1} .

Le principe des puissances virtuelles permet de donner une formulation variationnelle des équations d'admissibilité statique.

Pour tout champ x cinématiquement admissible à 0 à l'instant t_{i+1} :

$$\begin{aligned}
 \forall \mathbf{x} \text{ CA à } 0 \text{ à l'instant } t_{i+1}, \\
 \mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}(\mathbf{x}), t) = \int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{u}_{i+1}) : \mathbf{e}(t) d\Omega \\
 - \int_{\Omega} \mathbf{f}_{i+1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} d\Omega \\
 - \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_{i+1}^d(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} dS = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Cette équation est du type $\mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{x}) = 0$. Elle est non linéaire car la relation qui lie σ à \mathbf{u}_{i+1} est non linéaire. On peut la résoudre par un schéma de Newton. Son principe consiste à linéariser une équation de type $f(x)=0$ et la remplacer par la suite suivante :

$$f'(x^j) = \frac{f(x^j)}{x^j - x^{j+1}} \tag{16}$$

On peut alors trouver un élément x^{j+1} , plus proche que x^j de la solution de $f(x)=0$.

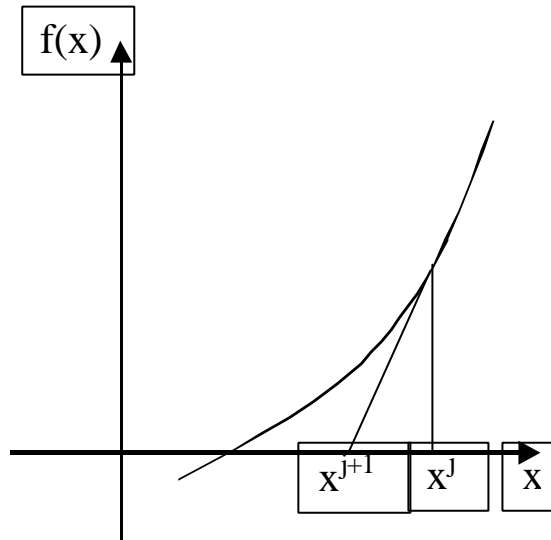


figure 14: représentation graphique de la méthode de Newton

Dans le cas de la résolution de (15), la dérivation ayant lieu par rapport à une grandeur vectorielle \mathbf{u}_{i+1} , on utilise alors la dérivée de Fréchet.

$$[D_{\mathbf{u}_{i+1}} \mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}^j, t)] \Delta \mathbf{u}_{i+1}^j = -\mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}^j, t) \tag{17}$$

En notant : $\mathbf{u}_{i+1}^{j+1} - \mathbf{u}_{i+1}^j = \Delta \mathbf{u}_{i+1}^j$

Ce qui s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{e}(\Delta \mathbf{u}_{i+1}^j) : \frac{\partial \mathbf{s}_{i+1}^j}{\partial \mathbf{e}_{i+1}^j} : \mathbf{e}(\cdot) d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{s}_{i+1}^j : \mathbf{e}(\cdot) d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}_{i+1}^j \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_{i+1}^j \cdot d\Omega \quad (18)$$

Le problème (18), dont l'inconnue est $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^j$, est linéaire. On peut le résoudre par la méthode des éléments finis.

On note :

$\Delta \mathbf{u}^j$ et \mathbf{x} les vecteurs nodaux des déplacements et déplacements virtuels.

\mathbf{s} , \mathbf{F} et \mathbf{f} représentent les vecteurs contraintes et forces.

On note \mathbf{C}^j l'opérateur tangent cohérent $\frac{\partial \mathbf{s}_{i+1}^j}{\partial \mathbf{e}_{i+1}^j}$ [SIMO-TAYLOR 85].

L'équation (18) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$${}^t\mathbf{x} \left[\sum_{elts} \left(\int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{B}^e \mathbf{C}^j \mathbf{B}^e dv \right) \Delta \mathbf{u}^j \right] = - {}^t\mathbf{x} \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{B}^e \mathbf{s}^j dv \right] + {}^t\mathbf{x} \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{N}^e \mathbf{F} dv \right] + {}^t\mathbf{x} \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{N}^e \mathbf{f} dv \right] \quad (19)$$

$\mathbf{K}_T^j = \sum_{elts} \left(\int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{B}^e \mathbf{C}^j \mathbf{B}^e dv \right)$ est la matrice tangente cohérente.

$\mathbf{R}^j = - \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{B}^e \mathbf{s}^j dv \right] + \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{N}^e \mathbf{F} dv \right] + \left[\sum_{elts} \int_{\Omega_e} {}^t\mathbf{N}^e \mathbf{f} dv \right]$ est le résidu à l'itération j .

L'incrément de déplacement est alors obtenu par la résolution du système suivant :

$$\mathbf{K}_T^j \Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{R}^j \quad (20)$$

A partir du champ de déplacement, on calcule l'incrément de contraintes et de déformations inélastiques qui sont liés par la relation de comportement. Ceci peut être fait par un algorithme de retour radial, par exemple, détaillé dans le chapitre suivant pour un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et un modèle élastoviscoplastique.

Ceci permet de calculer un nouveau résidu \mathbf{R}^{j+1} qui permettra de déterminer l'incrément de déplacement de l'itération suivante.

Ce schéma itératif est répété jusqu'à la convergence que l'on peut tester par exemple en

mesurant la norme $\frac{\|\mathbf{R}^j\|}{\|\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i\|}$ qui tend vers une valeur nulle.

Il est possible de présenter ce schéma de résolution de Newton-Raphson d'une manière un peu différente comme cela est fait dans [LADEVEZE 96]. Cette présentation permet de

faire le lien avec celle que nous ferons dans le paragraphe suivant de la méthode à grand incrément de temps et dans le chapitre portant sur la méthode cyclique directe.

Les équations du problème peuvent être séparées en deux groupes, suivant leurs caractéristiques :

- équations linéaires, qui peuvent être globales en espace (équation d'équilibre et de compatibilité)
- équations locales en espace, qui peuvent être non-linéaires (principalement les équations de comportement).

La résolution par la méthode incrémentale consiste alors à résoudre alternativement les équations des deux groupes à chaque incrément de chargement. Ces deux étapes sont nommées respectivement étapes globales et locales.

La méthode incrémentale reste l'outil de référence pour le calcul non-linéaire des structures. Cependant, lorsque les structures comportent un grand nombre de degrés de liberté et qu'un grand nombre de cycles est nécessaire pour que la structure s'adapte ou s'accommode, la résolution de l'équation (20) devient particulièrement coûteuse en temps de calcul, notamment du fait de l'inversion de la matrice tangente.

3.4 La méthode à grand incrément de temps

3.4.1 Présentation générale

La méthode à grand incrément de temps (ou LARGE Time INcrement, méthode LATIN) développée par Ladevèze et al. ([LADEVEZE 85], [BOISSE 87], [LADEVEZE 96]...) apporte une grande originalité dans la résolution de problèmes d'évolution non linéaire par rapport aux méthodes classiques telles que la méthode incrémentale présentée précédemment.

Elle diffère des méthodes incrémentales par la résolution du problème mécanique directement sur tout l'intervalle d'étude sans discrétiser le chargement en incréments.

La difficulté de résolution d'un problème d'évolution non-linéaire vient de la coexistence d'équations non linéaires, locales en espace (notamment la loi de comportement) et d'équations linéaires globales (c'est-à-dire nécessitant l'inversion d'un système contenant l'ensemble des degrés de liberté de la structure). Ladevèze propose, dans la méthode LATIN, de séparer les difficultés en résolvant ces deux types d'équations séparément sur l'ensemble de l'intervalle d'étude. Par un processus itératif, il construit alors la solution du problème en résolvant alternativement les équations de chaque type pour tout le trajet de chargement.

3.4.2 Principe

La séparation des équations du problème est un principe fondamental de la méthode LATIN. En pratique, différentes stratégies de séparation des équations ont été envisagées. Nous présentons une des versions qui semble être retenue de par ses performances.

La solution du problème du paragraphe 3.1 est composée des champs de déformations, déformations plastiques, contraintes, forces thermodynamiques et variables internes, définis sur l'ensemble de la structure et à tous les instants de l'intervalle d'étude.

Soit $s=(e(M,t), e^p(M,t), s(M,t), \mathbf{X}(M,t), \mathbf{Y}(M,t))$ un élément solution du problème. Il est défini sur $\Omega \times [0,T]$.

On peut définir deux ensembles d'éléments solutions vérifiant les deux groupes d'équations.

Soit Ad , l'ensemble des éléments s_n vérifiant les équations linéaires et éventuellement globales et Γ , l'ensemble des éléments \hat{s} vérifiant les équations locales en espace, éventuellement non linéaires.

La solution du problème mécanique est l'intersection des deux ensembles Ad et Γ . La méthode LATIN consiste alors à construire la solution finale en recherchant itérativement des solutions dans l'un et l'autre des groupes. Elle peut être schématiquement représentée par la figure 15.

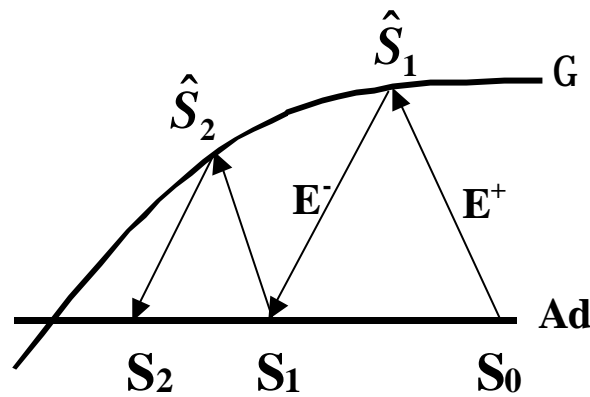


figure 15 Représentation schématique de la méthode LATIN et des directions de recherche.

Dans les premières versions, développées dans [BOISSE-BUSSY-LADEVEZE 90] et [COGNARD 89], l'ensemble Ad regroupe les équations de liaison et les équations d'équilibre. L'ensemble Γ représente les solutions qui vérifient la loi de comportement.

Lorsque l'on décrit la relation de comportement par une formulation standard et normale [LADEVEZE 89], on peut l'écrire sous la forme suivante :

Loi d'état :

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{K}(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ Y &= \Lambda X\end{aligned}$$

Loi décrivant l'évolution de l'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon^p \\ -X \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \sigma \\ Y \end{bmatrix} \quad \varepsilon^p \text{ et } X \text{ connus à } t=0$$

où :

L est un opérateur linéaire symétrique, défini positif et constant par rapport à t

B un opérateur éventuellement non linéaire.

Les seules équations non linéaires sont donc les lois d'évolution d'état.

En utilisant la formulation normale de la loi de comportement, on peut alors séparer les équations de la façon suivante :

- Ad , ensemble des éléments s_n qui vérifient les conditions d'admissibilité cinématique et statique et les lois d'état.
- Γ , ensemble des éléments \hat{s} qui vérifient les lois d'évolution.

Une itération de la méthode à grand incrément de temps est donc divisée en 2 étapes. La première, dite locale, consiste à déterminer à partir d'un élément s_n de Ad l'élément \hat{s}_{n+1} appartenant à Γ . La deuxième étape permet de déterminer l'élément s_{n+1} de Ad à partir de \hat{s}_{n+1} . Les directions de recherche associées à chacune de ces étapes sont notées respectivement E^+ et E^- . Pour définir ces directions de recherche, Ladevèze introduit deux opérateurs, notés respectivement H^+ et H^- . Afin d'assurer les propriétés recherchées dans la séparation des équations, H^+ est linéaire et local en espace et H^- linéaire.

- L'étape locale consiste donc à construire un élément \hat{s}_{n+1} tel que :

$$\hat{s} = \Gamma \cap (s_n + E^+)$$

L'élément \hat{s}_{n+1} doit donc vérifier :

- les lois d'évolution :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon^p \\ -X \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \sigma \\ Y \end{bmatrix} \quad \varepsilon^p = X = 0 \quad \text{à } t = 0$$

- l'équation définissant la direction de recherche :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}^p - \varepsilon_n^p \\ -(\hat{X} - X_n) \end{bmatrix} + H^+ \begin{bmatrix} \hat{\sigma} - \sigma_n \\ \hat{Y} - Y_n \end{bmatrix} = 0$$

- L'étape globale permet de déterminer l'élément s_{n+1} tel que :

$$s_{n+1} = Ad \cap (s_n + E^-)$$

L'élément s_{n+1} doit donc vérifier :

- les conditions d'admissibilité :

σ_{n+1} statiquement admissible

ϵ_{n+1} cinématiquement admissible

- les lois d'état

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \mathbf{K}\epsilon_{n+1}^e \\ Y_{n+1} &= \Lambda X_{n+1}\end{aligned}$$

- l'équation définissant la direction de recherche

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon_{n+1}^p - \hat{\epsilon}^p \\ -(X_{n+1} - \hat{X}) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \sigma_{n+1} - \hat{\sigma} \\ Y_{n+1} - \hat{Y} \end{bmatrix}$$

- les conditions initiales

$$\epsilon_{n+1}^p \text{ et } X_{n+1} \text{ connus à } t = 0$$

L'initialisation du processus itératif qui permet de déterminer S_0 est faite en général par un calcul élastique.

3.4.3 Résolution de l'étape globale

L'étape globale est la plus coûteuse en temps de calcul et en espace mémoire. Des approximations sont utilisées pour en diminuer le coût numérique. Le principe consiste à rechercher les solutions définies sur $\Omega \times [0, T]$, sous forme de produits de fonctions d'espace par des fonctions du temps. Cela revient à décomposer le problème en somme de problèmes de type chargement simple, c'est-à-dire des problèmes où l'on peut écrire les contraintes sous la forme $\sigma(M, t) = \lambda(t).C(M)$.

Les différentes variables sont donc recherchées sous la forme suivante :

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) A_i(M), \quad \text{avec } v = \epsilon^p, X, \sigma \quad (21)$$

Cette hypothèse permet alors de découpler le problème en espace et en temps. Une procédure itérative permet alors de déterminer les meilleures fonctions. Le problème en temps est résolu par un système d'équations différentielles du premier ordre ; le problème en espace se ramène à un problème de type élastique sur la structure. Des applications permettant d'illustrer cette méthode sont notamment données dans [LADEVEZE 96].

3.4.4 Cas des chargements cycliques

Dans le cas des chargements cycliques, Ladevèze utilise des approximations adaptées aux particularités de l'évolution des solutions afin de diminuer le coût numérique de la résolution du système d'équations différentielles.

Pour cela les auteurs introduisent dans [COGNARD-LADEVEZE 93] et [ARZT 94] des fonctions à deux échelles de temps. Une échelle courte permet de décrire l'évolution rapide

des grandeurs mécaniques sur un cycle et une échelle longue pour décrire l'évolution lente d'un cycle à l'autre.

En utilisant les propriétés des fonctions à deux échelles, la résolution du système différentielle sur l'ensemble de l'intervalle d'étude est possible à partir de l'intégration du système sur quelques cycles. Une interpolation linéaire permet alors de déterminer la solution entre ces cycles.

3.4.5 Cas des chargements anisothermes

La prise en compte des chargements anisothermes est montrée dans [COGNARD-LADEVEZE-TALBOT 99]. L'algorithme n'est pas modifié si l'on fait l'hypothèse de paramètres élastiques de la loi de comportement indépendants de la température. L'étape locale tient compte de la dépendance par rapport à la température des paramètres matériaux inélastiques.

3.5 Méthode des sauts de cycles

Pour simuler un grand nombre de cycles, Lesne et Savalle proposent une approche originale dite du saut de cycle [LESNE-SAVALLE 89]. Cette méthode a été mise en application dans [KRUCH 92] pour la simulation d'un disque de turbine.

L'hypothèse de cette méthode est de considérer l'évolution des grandeurs mécaniques d'un cycle à l'autre comme lente. Le principe consiste alors à ne calculer que quelques groupes de cycles au cours de l'ensemble du chargement et de déduire l'évolution entre ces groupes par une extrapolation.

Au lieu de décrire les grandeurs mécaniques à chaque instant des cycles, les auteurs proposent de décrire chaque grandeur en fonction de sa valeur au début de chaque cycle (notées y). Les valeurs sur l'ensemble du cycle peuvent être déduites à partir des valeurs en début de cycle par une intégration temporelle classique. Les auteurs introduisent alors une description des grandeurs mécaniques, non pas en fonction du temps mais en fonction du numéro de cycle comme représenté sur la figure 16.

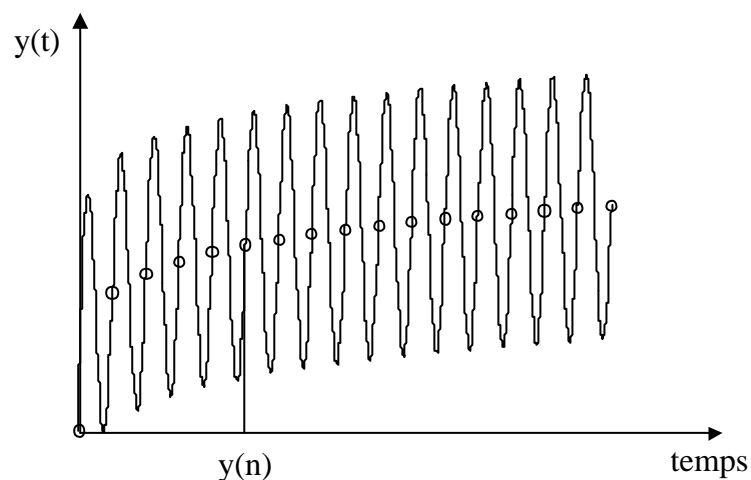


figure 16 : description des grandeurs mécaniques en fonction du nombre de cycle.

Comme l'évolution des grandeurs mécaniques est lente d'un cycle à l'autre, il est possible de faire un développement de Taylor au second ordre de ces valeurs en début de cycle en fonction du numéro de cycles :

$$y(n + \Delta n) = y(n) + y'(n)\Delta n + y''(n)\frac{\Delta n^2}{2} \quad (22)$$

Les valeurs de y' et y'' sont estimées par interpolation à partir du calcul des quelques cycles (cycles k et m sur la figure 17) autour du cycle n .

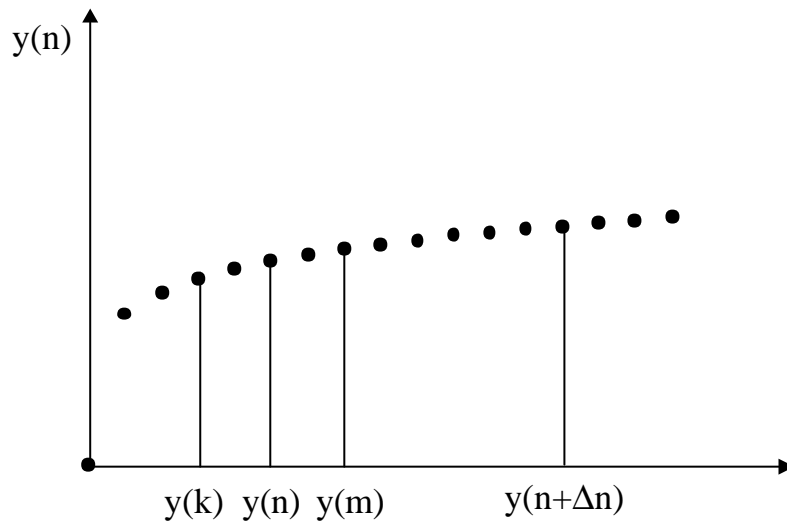


figure 17 : méthode des sauts de cycles

Le nombre de cycles pouvant être sautés Δn est alors déterminé en supposant négligeable le terme du second ordre par rapport au terme du premier ordre, ce qui donne la condition suivante :

$$\Delta n = 2\eta \frac{y'(n)}{y''(n)}$$

η doit être inférieur à 1, et en pratique, l'ordre de grandeur est de 0.01.

Il est alors possible, à partir du développement de Taylor des $y(n)$, d'extrapoler les valeurs des grandeurs mécaniques au cycle $n + \Delta n$.

Nous avons vu précédemment que pendant les premiers cycles les grandeurs mécaniques évoluent rapidement. C'est la phase d'adoucissement ou de durcissement cyclique. L'extrapolation utilisée pour le saut de cycle devient impossible. Il est alors nécessaire de calculer l'ensemble des premiers cycles pendant lesquels les variations des grandeurs mécaniques sont importantes.

3.6 Analyse simplifiée des structures : méthode ZAC

Les méthodes présentées précédemment permettent, sous certaines hypothèses, de représenter l'évolution de la structure sur tout l'intervalle d'étude. Zarka et al. proposent de rechercher directement l'état limite de la structure soumise à un chargement cyclique, sans suivre l'évolution du chargement ([ZARKA 90], [KHALIJ 01]).

Dans le cadre de cette présentation, nous nous plaçons dans le cas d'un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, bien que la méthode s'étende à d'autres modèles de comportement. Avec cette loi de comportement, nous avons vu précédemment que l'état limite de la structure est un cycle stabilisé, soit purement élastique (adaptation), soit élastoplastique (accommodation).

Dans la suite de ce paragraphe nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \delta\varepsilon(t) + \varepsilon^I \\ \varepsilon^p(t) &= \delta\varepsilon^p(t) + \varepsilon^{pI} \\ \sigma(t) &= \delta\sigma(t) + \sigma^I\end{aligned}\tag{23}$$

où les valeurs notées δ correspondent à la réponse cyclique de la structure, et les valeurs indicées I correspondent aux champs initiaux.

3.6.1 changement de variables

Les auteurs proposent de décomposer les grandeurs mécaniques (déformations et contraintes) en une partie purement élastique et une partie inélastique. La partie purement élastique correspond aux valeurs des champs dans la structure, en supposant un comportement élastique. Soit,

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \delta\varepsilon^{el} + \delta\varepsilon^{iné} \\ \delta\mathbf{s}(t) &= \delta\mathbf{s}^{el}(t) + \delta\mathbf{R}(t)\end{aligned}\tag{24}$$

avec :

$$\delta\varepsilon^{iné}(t) = \mathbf{M}.\delta\mathbf{R}(t) + \delta\varepsilon^p(t)\tag{25}$$

où \mathbf{M} est la matrice inverse de la matrice d'élasticité et $\delta\mathbf{R}(t)$ le champ de contraintes résiduelles.

De plus on introduit un opérateur, noté ELAS [GEOM, CHAR , DEFINI , COMP], qui permet, à partir d'une géométrie (GEOM), d'un chargement (CHAR), de déformations initiales incompatibles (DEFINI) et d'une loi de comportement élastique (COMP) de déterminer un champ de déformation solution du problème purement élastique. Cet opérateur utilise en général la méthode des éléments finis.

A partir des équations (24), nous pouvons dire que le champ de contraintes résiduelles $\delta\mathbf{R}(t)$ et les déformations inélastiques $\delta\varepsilon^{iné}(t)$ sont respectivement statiquement et cinématiquement admissibles à 0.

Les parties élastiques et inélastiques peuvent être calculées à partir de l'opérateur ELAS.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon^{\text{el}} &= \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{s}^{\text{el}} \\ \text{ou } \delta \varepsilon^{\text{el}} &= \text{ELAS} [\text{GEOM}, \text{CHAR}, 0, \mathbf{M}] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon^{\text{iné}} &= \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{R} + \delta \varepsilon^{\text{p}} \\ \text{ou } \delta \varepsilon^{\text{iné}} &= \text{ELAS} [\text{GEOM}, \text{CHAR}, \delta \varepsilon^{\text{p}}, \mathbf{M}] \end{aligned} \quad (27)$$

Zarka introduit le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \delta \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^{\text{I}} \\ \delta \mathbf{Y} &= \mathbf{C} \delta \varepsilon^{\text{p}} - \text{dev}(\delta \mathbf{R}) \\ \mathbf{Y}^{\text{I}} &= \mathbf{C} \mathbf{e}^{\text{pl}} - \text{dev}(\mathbf{s}^{\text{I}}) \end{aligned} \quad (28)$$

La variable \mathbf{Y} est appelée paramètre transformé.

Avec ce changement de variables et pour un matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire, la fonction seuil de type Mises s'écrit alors :

$$\frac{3}{2} (\delta \mathbf{S}^{\text{el}} - \mathbf{Y}) : (\delta \mathbf{S}^{\text{el}} - \mathbf{Y}) \leq k_0^2 \quad (29)$$

$\delta \mathbf{S}^{\text{el}}$ est le déviateur des contraintes élastiques $\delta \mathbf{s}^{\text{el}}$.

Nous nous plaçons désormais dans l'espace des paramètres transformés de la structure. S'il y a écoulement plastique celui-ci se fait à la vitesse :

$$\dot{\varepsilon}^{\text{p}} = \lambda (\mathbf{S}^{\text{el}} - \mathbf{Y}) \quad (30)$$

λ étant le multiplicateur plastique classique.

L'équation (30) signifie que, dans l'espace des paramètres transformés, l'écoulement se fait suivant la normale intérieure au convexe centré sur \mathbf{S}^{el} .

Dans le paragraphe suivant, nous verrons que l'on peut déterminer les positions de \mathbf{Y} en fonction du trajet de chargement. Il est alors possible de déterminer les déformations inélastiques $\delta \varepsilon^{\text{iné}}$ en fonction de $\delta \mathbf{Y}$ et $\delta \mathbf{R}$ par l'opérateur ELAS.

En effet, à partir de (28) on a :

$$\delta \varepsilon^{\text{p}} = \mathbf{C}^{-1} (\delta \mathbf{Y} + \text{dev}(\delta \mathbf{R})) \quad (31)$$

Si l'on reporte cette équation dans (27), on obtient alors :

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}^{iné} &= \mathbf{M}.d\mathbf{R} + \mathbf{C}^{-1}(d\mathbf{Y} + dev(d\mathbf{R})) \\ &= \mathbf{M}'d\mathbf{R} + d\mathbf{e}^{ini} \end{aligned} \quad (32)$$

\mathbf{M}' représente une matrice d'élasticité modifiée décrivant l'opérateur $\mathbf{M}() + \mathbf{C}^{-1}dev()$.

$\delta\mathbf{e}^{ini}$ représente des déformations initiales non compatibles ($\delta\mathbf{e}^{ini} = \mathbf{C}^{-1}\delta\mathbf{Y}$).

Le calcul de $\delta\mathbf{e}^{iné}$ (32) se fait par l'opérateur ELAS :

$$d\mathbf{e}^{iné} = \text{ELAS} [\text{GEOM}, \text{CHAR}, d\mathbf{e}^{ini}, \mathbf{M}'] \quad (33)$$

3.6.2 calcul des paramètres transformés

Avec le changement de variables présenté précédemment et l'utilisation de l'opérateur ELAS, nous avons vu qu'il est possible de déterminer les champs de déformations inélastiques à partir des valeurs des paramètres transformés. Le principe fondamental de cette méthode est d'approcher les valeurs asymptotiques de ces paramètres par une approximation géométrique.

En s'appuyant sur le théorème d'adaptation de Melan-Koiter, et sa généralisation aux matériaux standards généralisés par Mandel, Halphen et Zarka, il est possible de donner une condition pour déterminer l'état limite adapté ou accommodé en chaque point de la structure.

En effet, en se plaçant dans l'espace des paramètres transformés, le trajet de chargement périodique et élastique est représenté par une courbe fermée notée ϕ sur la figure 18. Si le rayon de la plus petite hypersphère noté (σ^ϕ) contenant ϕ est inférieur à la limite d'élasticité, la structure s'adapte ; sinon la structure s'accommode.

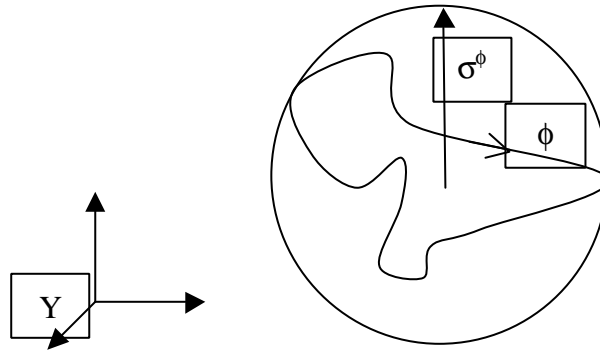


figure 18 : représentation du théorème statique d'adaptation dans l'espace des paramètres transformés

A partir de la connaissance de l'état limite en tout point de la structure, il est possible de construire les paramètres transformés.

Pour expliciter la construction des paramètres transformés, nous nous plaçons dans le cadre d'un chargement radial bien que la méthode s'applique aux cas plus généraux. Dans

l'espace des paramètres transformés, le trajet de chargement est alors représenté par une droite (figure 19).

Le paramètre transformé doit, à l'état limite, être plastiquement admissible et donc doit être à l'intérieur du convexe de plasticité à chaque instant du cycle.

L'hypothèse faite dans cette méthode est de considérer que tout se passe comme si le convexe de plasticité entraînait le paramètre transformé dans son déplacement au cours du chargement.

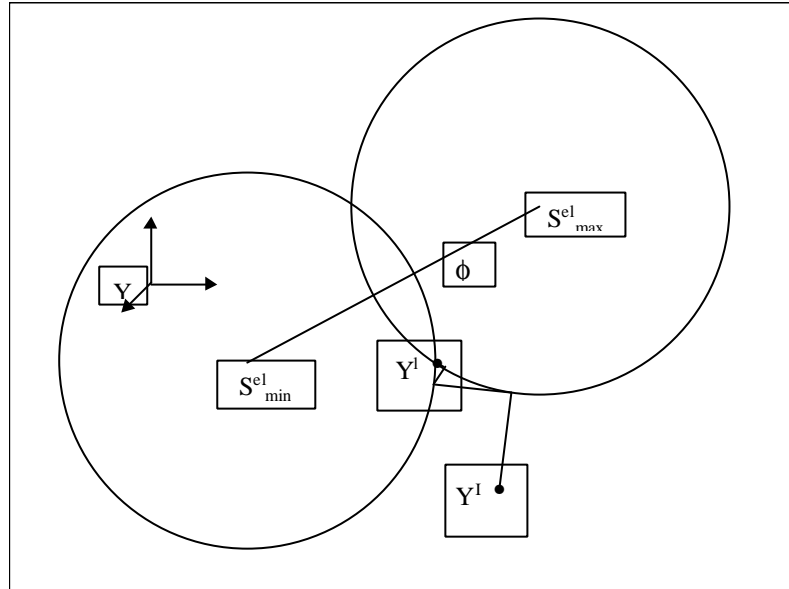


figure 19 : Construction des paramètres transformés dans le cas de l'adaptation.

Dans le cas de l'adaptation, le paramètre transformé est à l'intersection des convexes centrés sur S^{el}_{min} et S^{el}_{max} . Il est alors possible d'estimer la position du paramètre transformé en faisant une projection normale du paramètre initial (Y^I) sur le convexe de plasticité centré sur S^{el}_{max} puis sur le convexe centré sur S^{el}_{min} jusqu'à ce que le paramètre transformé soit situé dans l'intersection des deux convexes (Y^I), comme indiqué sur la figure 19.

Dans le cas de l'accommodation, l'intersection des convexes est vide. Cependant il est possible d'estimer les valeurs asymptotiques des paramètres transformés en projetant progressivement les paramètres transformés initiaux sur les convexes centrés sur les déviateurs des contraintes maximales puis minimales, comme indiqué sur la figure 20.

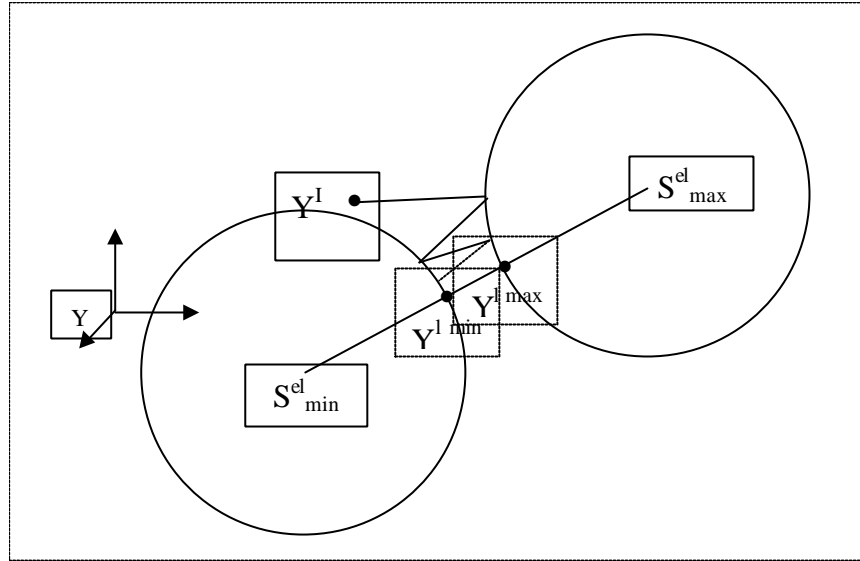


figure 20 : Construction des paramètres transformés dans le cas de l'accommodation

A partir de l'estimation des paramètres transformés, il est possible de déterminer les déformations plastiques à partir de l'équation (33).

Cette méthode qui peut se généraliser aux chargements non radiaux permet donc à partir de la résolution de quelques problèmes linéaires (utilisation de l'opérateur ELAS) d'estimer l'état stabilisé de la structure soumise à un chargement cyclique. Cependant ce ne sont que des approximations, notamment liées à l'estimation des paramètres transformés. De plus dans le cas des chargements anisothermes, cette méthode ne permet pas de prendre en compte la variation des paramètres matériaux élastiques en fonction de la température.

3.7 Approche cyclique

A partir de la méthode à grand incrément de temps, Akel et Nguyen [AKEL-NGUYEN 89] ont développé une méthode semblable permettant de traiter les problèmes cycliques. Les auteurs proposent de déterminer, sans suivre l'ensemble du trajet de chargement, la solution stabilisée du problème.

De la même façon que la méthode LATIN, cette approche sépare la résolution des équations globales et locales sur l'ensemble du cycle, en résolvant d'une part les équations d'équilibre sur l'ensemble du cycle puis, d'autre part, les équations de comportement sur l'ensemble du cycle. Cependant, la solution de cette méthode étant une solution périodique, la résolution numérique ne traite qu'un seul cycle de chargement.

3.7.1 Etape globale

L'étape globale est résolue par une approche classique incrémentale. A chaque instant du cycle, les déformations plastiques sont connues par l'étape locale de l'itération précédente. Les champs de déplacements statiquement admissibles sont alors déterminés à chaque instant par la résolution d'un problème élastique avec un champ de déformation plastique initial.

3.7.2 Etape locale

Les solutions de l'étape locale sont déterminées par une projection normale de type retour radial, à tous les instants du cycle. Lorsque les déformations plastiques sont connues à tous les instants du cycle, un test vérifie la périodicité des solutions plastiques. Si celles-ci ne sont pas périodiques, l'étape locale est répétée avec comme incrément de déformation initial, la différence entre les valeurs à la fin du cycle et celle du début du cycle. Cette boucle dans l'étape locale permet de construire progressivement la solution périodique au problème posé.

3.8 Méthode du contrôle optimal

L'estimation directe de l'état asymptotique est aussi recherchée dans la méthode présentée dans [PEIGNEY-STOLZ 01].

Le principe de cette méthode met en application le contrôle optimal afin de ramener la détermination du comportement asymptotique comme un problème de minimisation. Il consiste à définir le comportement asymptotique d'une structure constituée d'un matériau élastoviscoplastique standard généralisé de classe C, dont le comportement élastique est considéré indépendant de la température. Cette structure est soumise à un chargement thermomécanique T-périodique.

Le champ de contraintes généralisées définies par $\mathbf{S} = (\mathbf{s}, \mathbf{A})$ peut se décomposer en une partie élastique et une partie résiduelle, fonction du champ de déformations incompatibles \mathbf{e}^p et de paramètres d'écrouissage α . Les modules élastiques sont notés $s(\mathbf{x})$. On peut relier les contraintes résiduelles aux paramètres d'écrouissage par une matrice \mathbf{Z} , symétrique définie positive par $\mathbf{A} = \mathbf{Z} \cdot \alpha$.

Les auteurs définissent une fonctionnelle J , dépendant de la variable de contrôle $(\mathbf{e}_0^p, \alpha_0)$ qui décrit l'énergie élastique associée à l'écart en périodicité des contraintes généralisées :

$$J(\mathbf{e}_0^p, \alpha_0) = \frac{1}{2} [\Delta \Sigma^r, \Delta \Sigma^r]$$

où

$$\Delta \Sigma^r = \Sigma^r(T) - \Sigma^r(0)$$

$$[(\mathbf{s}, \mathbf{A}), (\mathbf{s}', \mathbf{A}')] = \int_{\Omega} \left\{ \mathbf{s}(\mathbf{x}) : \mathbf{s}'(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{x}) : \mathbf{A}'(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x}$$

La minimisation de J par rapport à $(\mathbf{e}_0^p, \alpha_0)$ permet de déterminer le comportement asymptotique de la structure. Une approximation de J est alors donnée grâce à une formulation éléments finis, ce qui permet une mise en pratique intéressante.

Les chargements cycliques restent un sujet de recherche très ouvert malgré les nombreux travaux déjà proposés. L'existence et l'unicité d'un cycle limite pour une structure soumise à un chargement périodique est démontrée pour un certain nombre de modèles de comportement, et notamment pour les matériaux standards généralisés à écrouissage cinématique, en supposant le comportement thermoélastique indépendant de la température.

La nécessité de proposer une alternative aux techniques incrémentales, trop coûteuses en temps de calcul pour simuler les chargements cycliques, motive de nombreuses études qui présentent des algorithmes originaux pour la détermination de l'état asymptotique d'une structure.

Parmi les idées développées dans ces différents travaux, nous nous proposons d'en retenir certaines, pour les mettre en application dans la méthode cyclique directe présentée dans le chapitre suivant :

- recherche directe de l'état asymptotique
- séparation des équations globales et locales
- résolution globale des équations sur l'intervalle d'étude
- séparation des variables d'espaces et de temps pour simplifier les techniques de résolution des équations globales

Chapitre III

Méthode Cyclique directe

1. Contexte général

Dans la plupart des méthodologies de dimensionnement des structures à la fatigue, une approche découplée, plus facile à mettre en œuvre et moins consommatrice de temps de calcul, est adoptée. Elle consiste à effectuer d'abord une analyse thermomécanique sans prise en compte de l'endommagement, puis une analyse de l'endommagement à travers un critère de fatigue approprié, permettant de relier les grandeurs mécaniques de l'état stabilisé à la durée de vie de la structure.

Elle est fondée sur le fait que la structure atteint, en général, un état stabilisé ou pseudo-stabilisé, représentatif de la plus grande partie de sa durée de vie et caractérisant le type de fatigue susceptible de survenir : ainsi, une adaptation sera synonyme de fatigue à grand nombre de cycles alors qu'une accommodation entraînera de la fatigue oligocyclique.

C'est cette approche qui est utilisée par PSA pour le dimensionnement des pièces chaudes de moteur et qui constitue le cadre de ce travail.

L'information ainsi recherchée par la simulation numérique est alors uniquement la réponse asymptotique de la structure ; il n'est donc pas utile de suivre l'ensemble du trajet de chargement, pour pouvoir prédire la durée de vie de la structure étudiée.

Actuellement, la méthode la plus utilisée en calcul de structure, notamment dans la majorité des codes industriels, est la méthode incrémentale. Elle consiste en une discrétisation de l'évolution temporelle des sollicitations thermomécaniques en incréments. Elle permet alors de construire la réponse mécanique de la structure étudiée, incrément de chargement par incrément de chargement, puis cycle après cycle jusqu'à un éventuel cycle stabilisé.

A chaque incrément, les codes de calculs utilisent en général un schéma itératif de type Newton-Raphson pour construire la solution du problème. Celle-ci vérifie d'une part les équations d'équilibre et d'autre part la loi de comportement.

La résolution des équations d'équilibre revient à la recherche de la solution d'un système linéaire d'équations couplant l'ensemble des degrés de liberté de la structure (étape dite globale).

La vérification de la loi de comportement est, quant à elle, effectuée de manière découplée, en chaque point d'intégration (étape dite locale). Pour assurer une bonne convergence de la méthode dans le cas de chargement fortement non linéaire, il est nécessaire d'utiliser des incréments de temps suffisamment petits.

Cette méthode a fait ses preuves dans de très nombreuses applications industrielles et reste l'outil de base du calcul de structures.

Cependant, dans le cas des chargements cycliques, le temps de calcul nécessaire à la simulation de dizaines de cycles sur des structures ayant un grand nombre de degrés de liberté reste pénalisant pour l'application de stratégies numériques de dimensionnement prenant en compte une modélisation relativement fine de la géométrie, du matériau et du chargement. Il est indispensable de développer une méthode numérique alternative aux méthodes incrémentales pour la simulation de structures soumises à de tels chargements.

Les méthodes de recherche de l'état asymptotique des structures soumises à des chargements cycliques, comme celles développées par [AKEL-NGUYEN 89], [NGUYEN 00], [MAOUCHE 97], [MAOUCHE-MAITOURNAM-DANG VAN 97] semblent présenter une alternative intéressante.

C'est pourquoi, dans le cadre de l'approche du dimensionnement à la fatigue thermomécanique, nous nous proposons de reprendre cette stratégie pour rechercher la réponse mécanique stabilisée ou pseudo-stabilisée de la structure soumise à des chargements thermomécaniques cycliques. L'approche ainsi développée est appelée méthode cyclique directe. Elle s'appuie sur les points-clés suivants : (i) recherche directe d'un cycle stabilisé, (ii) séparation de la résolution des étapes globale et locale sur l'ensemble du cycle, (iii) adaptation des stratégies de recherche pour améliorer les temps de calcul.

Dans ce chapitre, après une présentation du problème, nous détaillons le principe général de la méthode cyclique directe. Nous avons délibérément choisi de présenter dans un premier temps, une version particulière de cette méthode, proche des stratégies numériques de type Newton modifié. Elle est illustrée sur un cas élastoplastique unidimensionnel. Elle comporte notamment l'utilisation du développement en série de Fourier de la solution de l'étape globale. Cette dernière stratégie s'insère dans un cadre plus général de résolution de problème non linéaire périodique par série de Fourier dont nous donnerons ensuite une présentation.

2. Position du problème

Comme nous recherchons une solution cyclique, le problème se pose différemment de celui du chapitre précédent. Nous étudions ici la réponse de la structure à un cycle de chargement, contrairement au problème général où la structure est étudiée sur un intervalle de temps suffisamment grand pour que la structure atteigne un régime stabilisé.

Le problème que l'on se propose de traiter avec la méthode cyclique directe se définit comme suit :

On considère une structure occupant un domaine Ω soumise à un chargement cyclique périodique en temps, de période T . Ce chargement peut se décomposer en efforts volumiques $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ appliqués dans Ω , en efforts surfaciques $\mathbf{F}^d(\mathbf{x},t)$ appliqués sur une partie $\partial_F \Omega$ de sa frontière, en déplacements imposés $\mathbf{U}^d(\mathbf{x},t)$ appliqués sur la partie complémentaire $\partial_U \Omega$ de sa frontière ($\partial_F \Omega \cup \partial_U \Omega = \partial \Omega$ et $\partial_F \Omega \cap \partial_U \Omega = \emptyset$), et un champ de température $\tau(\mathbf{x},t)$ comme représentés sur la figure 21.

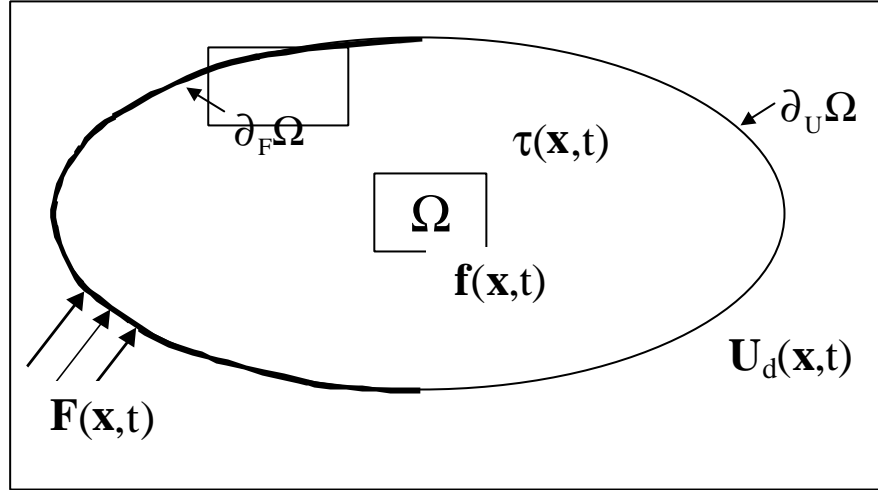


figure 21 : Illustration du problème mécanique

Les sollicitations appliquées à la structure étudiée entraînent une réponse (déplacements, déformations, déformations inélastiques et contraintes) définie en chaque point de la structure et à tout instant du cycle. Cette réponse évolue et tend asymptotiquement vers un cycle limite (au moins en contrainte et en vitesse des grandeurs thermomécaniques).

Il s'agit d'un problème d'évolution. Les équations qui le définissent sont, dans l'hypothèse des petites perturbations :

Equations d'équilibre	$\text{divs}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$	dans $\Omega \times [0, T]$	(34)
-----------------------	--	-----------------------------	------

Equations de compatibilité	$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + {}^t \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$	dans Ω	(35)
----------------------------	---	---------------	------

Conditions aux limites	$\mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}_j = \mathbf{F}_i^d(\mathbf{x}, t)$	sur $\partial_F \Omega$	(36) (a)
------------------------	---	-------------------------	----------

	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}^d(\mathbf{x}, t)$	sur $\partial_U \Omega$	(b)
--	---	-------------------------	-----

	$\mathbf{s}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{s}^I(\mathbf{x})$		
--	--	--	--

Conditions initiales	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^I(\mathbf{x})$	dans Ω	(37)
----------------------	--	---------------	------

	$\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}^I(\mathbf{x})$		
--	--	--	--

Loi de comportement	$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \Psi_0'(\mathbf{e}(\mathbf{x}, \tau))$	dans Ω	(38)
---------------------	---	---------------	------

La solution de ce problème est constituée d'un champ de déplacement cinématiquement admissible et d'un champ de contrainte statiquement admissible associés par la loi de comportement.

Le champ de déplacement \mathbf{u} est dit « cinématiquement admissible » (CA) si, en plus des régularités requises, il vérifie les conditions aux limites en déplacement (36) (b).

Le champ de déformation \mathbf{e} est dit « cinématiquement admissible » si le champ de déplacement dont il dérive est cinématiquement admissible.

On dit qu'il est « cinématiquement admissible à 0 » si le champ de déplacement s'annule sur $\partial_U \Omega$.

Le champ de contrainte \mathbf{s} est dit « statiquement admissible » (SA) si, en plus des régularités requises, il vérifie l'équation d'équilibre (34) et les conditions aux limites (36) (a). Sous la forme variationnelle, on a alors :

$$\forall \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \text{ CA à 0 à l'instant } t \in [0, T],$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_t, t) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) dS \quad (39)$$

où \mathbf{x}_t est un champ de déplacement virtuel.

Le champ de contrainte est dit statiquement admissible à 0 s'il vérifie la condition d'équilibre pour un chargement nul :

$$\forall \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) \text{ CA à 0 à l'instant } t \in [0, T],$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) : \mathbf{e}(\mathbf{v}_t, t) d\Omega = 0 \quad (40)$$

Les champs de déformation et de contrainte sont dits « plastiquement admissibles », s'ils sont associés par la loi de comportement (38).

L'objectif de la méthode cyclique directe est la détermination de la réponse cyclique, si elle existe, et donc de l'évolution de l'ensemble des grandeurs mécaniques sur le cycle stabilisé.

3. Principe de la méthode cyclique

La méthode cyclique directe est une méthode de résolution de problèmes non linéaires de structures soumises à des sollicitations thermomécaniques cycliques. Dans notre présentation, nous nous limitons aux cas de non-linéarités de comportement. Son objectif est de rechercher directement une solution périodique au problème posé précédemment. [POMMIER-MAÏTOURNAM-GAOMBALET 01]

La méthode cyclique directe s'appuie sur quatre idées principales.

- Simulation d'un cycle de chargement

Comme on ne s'intéresse qu'à la réponse asymptotique, on n'étudie qu'un cycle de chargement. Ce principe a été développé dans la méthode cyclique d'Akel et Nguyen [AKEL-NGUYEN 89].

- Séparation des étapes

La résolution d'un problème mécanique non linéaire consiste, comme nous l'avons vu précédemment, à rechercher une solution vérifiant deux types d'équations : les équations d'équilibre et les équations de comportement.

- Les équations d'équilibres sont nécessairement résolues à chaque instant par un système global sur toute la structure.
- Les équations constitutives sont non-linéaires mais sont résolues à chaque instant, localement en chaque point d'intégration des éléments traités indépendamment les uns des autres.

La difficulté de la résolution de ce problème vient de la coexistence de ces deux types d'équations. Afin de rendre le problème plus simple Ladevèze propose de séparer les difficultés en effectuant un traitement temporel global (sur tout l'intervalle d'étude) des équations globales et locales [LADEVÈZE 96].

Nous appliquerons ce principe de séparation des difficultés dans la méthode cyclique directe. En effet, nous traiterons d'une part la résolution des équations d'équilibre sur l'ensemble du cycle et d'autre part, nous nous intéresserons à la résolution des équations de comportement sur l'ensemble du cycle de chargement. Cela évite de coûteux passages d'une résolution à l'échelle globale à une résolution à l'échelle locale.

- Recherche de la solution périodique

Pour obtenir une solution stabilisée, nous imposons la périodicité de la solution dans le processus de recherche. Cela diffère de la présentation de Nguyen [NGUYEN 00] dans laquelle la périodicité de la solution n'est qu'un critère d'arrêt au schéma itératif de l'étape locale et non une propriété imposée.

- Prise en compte de la périodicité

L'étape globale est la phase la plus coûteuse en temps de calcul. Pour optimiser le temps de calcul, nous adapterons la stratégie de résolution des équations d'équilibre aux particularités des solutions recherchées pour diminuer le nombre de résolutions de systèmes linéaires. Etant donné que les solutions tendent vers un état périodique, nous allons rechercher les déplacements sous forme de série de Fourier. Nous verrons dans la suite comment cela permet de diminuer de manière appréciable le temps de calcul.

4. Description générale

La méthode cyclique directe est un processus itératif qui va progressivement construire une solution au problème posé en déterminant alternativement des solutions statiquement et cinématiquement admissibles à tous les instants du cycle (étape globale) puis des solutions vérifiant la loi de comportement à tous les instants du cycle (étape locale).

Une itération de la méthode cyclique directe comprend donc les 4 étapes décrites ci-dessous.

- L'étape globale permet de rechercher les champs cinématiquement et statiquement admissibles à tous les instants du cycle en supposant connu le champ de déformations plastiques et de variables internes à tous les instants du cycle.

- L'étape locale permet, à partir des solutions de l'étape globale, de rechercher des champs qui vérifient la loi de comportement.
- La périodicité des solutions est imposée par une réinitialisation des déformations plastiques et des variables internes au début du cycle à partir des valeurs obtenues à la fin du cycle.
- La condition de convergence qui permet d'arrêter le processus itératif vérifie la périodicité des champs de déformations plastiques et des variables internes à la fin de l'étape locale ainsi que l'admissibilité statique des contraintes à la fin de l'étape locale.

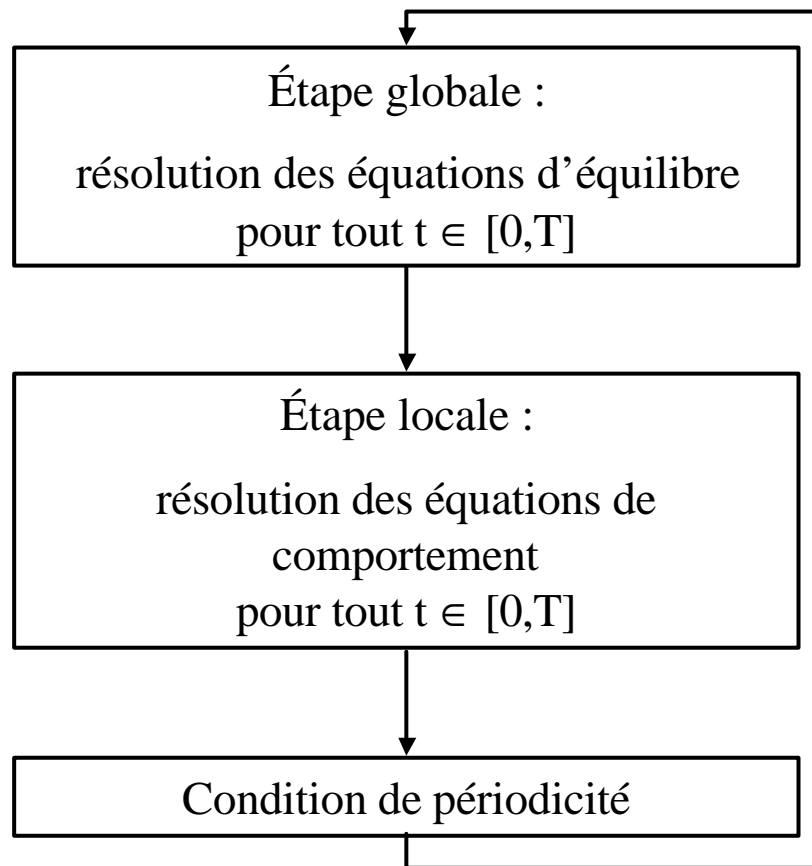


figure 22 : principe général de la méthode cyclique directe

4.1 Etape globale

4.1.1 Présentation

L'étape globale a pour objectif de construire sur tout le cycle les champs de déplacements et de contraintes cinématiquement et statiquement admissibles. Il est donc nécessaire de résoudre l'équation (39) pour $t \in [0, T]$:

$$\forall ? \text{ CA à } 0 \text{ sur } [0, T],$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{s} : \mathbf{e}(?) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot ? \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}^d \cdot ? \, dS \quad (41)$$

Il est important de noter que les champs \mathbf{h} et \mathbf{s} , sont définis sur $\Omega \times [0, T]$. Ce ne sont donc pas des valeurs instantanées comme dans un problème incrémental mais bien des champs, fonction du temps. Cette équation définit donc l'admissibilité statique des grandeurs sur l'ensemble du cycle.

Classiquement, on considère la partition de la déformation totale \mathbf{e} en déformation élastique \mathbf{e}^e et déformation inélastique \mathbf{e}^p .

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$$

Les contraintes sont alors reliées aux déformations totales et aux déformations inélastiques par la relation de Hooke :

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$$

où l'on note \mathbf{C} le tenseur d'élasticité de Hooke.

Si l'on considère les déformations plastiques connues sur l'ensemble du cycle à une itération donnée l'équation (41) devient :

$$\forall ? \text{ CA à } 0 \text{ sur } [0, T],$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) : \mathbf{C} : \mathbf{e}(?) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot ? \, d\Omega + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}^d \cdot ? \, dS \quad (42)$$

Cette équation peut être résolue par la méthode des éléments finis. Le champ de déplacement et le champ de déformation sur chaque élément s'écrivent donc en fonction des valeurs aux nœuds de l'élément : $\mathbf{u} = \mathbf{N}^e \mathbf{U}_n^e$ et $\mathbf{e} = \mathbf{B}^e \mathbf{U}_n^e$

On peut écrire l'équation (42) sous la forme suivante, où le terme \sum_{elts} représente l'assemblage des matrices élémentaires sur tous les éléments de la structure :

$$\forall \mathbf{X}_n^e \text{ CA à } 0 \text{ sur } [0, T],$$

$${}^T \mathbf{X}_n^e \left[\sum_{elts} \int_{\Omega^e} {}^T \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^e \, d\Omega \right] \mathbf{u}_n^e = {}^T \mathbf{X}_n^e \left[\sum_{elts} \int_{\Omega^e} {}^T \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{f} \, d\Omega \right. \\ \left. + \sum_{elts} \int_{\partial_F \Omega} {}^T \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{F}^d \, dS \right. \\ \left. + \sum_{elts} \int_{\Omega^e} {}^T \mathbf{B}^e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}^p \, d\Omega \right] \quad (43)$$

La résolution de l'étape globale peut donc se faire à partir de la résolution du système suivant (44). C'est un système linéaire si l'on suppose connues, au cours de l'itération, les déformations plastiques sur tout le cycle et en tout point de la structure.

$$K(t).U_n(t) = F(t) + Q^P(t) \quad (44)$$

avec :

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{elts} \int_{\Omega^e}^T B^e C(t) . B^e d\Omega \\ F(t) &= \sum_{elts} \int_{\Omega^e}^T N^e . f(t) d\Omega + \sum_{elts} \int_{\partial\Omega}^T N^e . F(t) dS \\ Q &= \sum_{elts} \int_{\Omega^e}^T B^e . C . e^P d\Omega \end{aligned} \quad (45)$$

où l'on définit pour tout t appartenant à l'intervalle [0 , T] :

La matrice K(t) est la matrice de rigidité élastique.

Le vecteur U_n(t) est la valeur du champ de déplacement aux nœuds du maillage.

Le vecteur F(t) représente les efforts nodaux dus aux champs de force f et F^d.

Le vecteur Q^P(t) représente les forces nodales dues au champ de déformations plastiques ε^P(t).

L'inconnue U_n du système est le champ de déplacement défini à tous les nœuds de la structure et à tous les instants du cycle.

Dans la suite, nous ne noterons plus l'indice n pour indiquer les valeurs nodales du champ de déplacement.

4.1.2 Résolution par une approche incrémentale

Dans la première version de la méthode cyclique directe, Maouche proposait de résoudre l'équilibre (44) par une résolution incrémentale [MAOUCHE 97].

Si l'on discrétise le cycle [0 , T] en N instants t_i, l'équation d'équilibre (44) peut être résolue à chaque instant t_i sous la forme :

$$K_i . U_i = F_i + Q_i \quad i = 1, \dots, N \quad (46)$$

avec :

$$\begin{aligned} U_i &= U(t_i) \\ F_i &= F(t_i) \quad i = 1, \dots, N \\ Q_i &= Q(t_i) \end{aligned}$$

La connaissance du champ de déplacement en chaque instant t_i du cycle, en tout point de la structure permet de déterminer les champs de déformation cinématiquement admissibles et les champs de contrainte statiquement admissibles à chaque instant t_i .

L'équilibre de la structure n'est donc vérifié qu'à certains instants du cycle et l'on fait l'hypothèse d'une évolution linéaire des déplacements entre chaque instant. Il est donc nécessaire de limiter la taille de l'incrément de temps sous peine de dégrader la solution.

Cette version a été illustrée dans le cas de la simulation de problème de contact à faibles débattements entre deux solides (fretting) [MAOUCHE 97]. La comparaison avec un calcul incrémental montre une bonne corrélation avec un gain en temps de calcul de l'ordre de 10 pour une structure présentant environ 5000 degrés de liberté.

4.1.3 Résolution en série de Fourier

Nous avons vu que l'étape globale permet de déterminer le champ de déplacement qui vérifie, à tout instant du cycle étudié, l'équation d'équilibre suivante :

$$K(t).U(t) = F(t) + Q(t) \quad (47)$$

Cette étape est la plus coûteuse en temps de calcul. Afin de réduire le temps de calcul, nous proposons de rechercher les déplacements définis sur $\Omega \times [0,T]$ par une approximation adaptée aux particularités du problème.

Dans la stratégie de la méthode cyclique directe, le champ de déplacement solution de l'étape globale tend vers un état périodique en temps, en l'absence de rochet. Dans ce contexte, la décomposition en série de Fourier est la solution qui semble la mieux adaptée pour représenter les déplacements inconnus. Cela permet de découpler les inconnues temporelles et spatiales.

On cherche les champs de déplacement $U(x,t)$ périodiques sur l'intervalle $[0,T]$ sous la forme de série de Fourier. On peut écrire les champs de déplacement sous la forme d'une décomposition en série de Fourier :

$$U_k(x) = \frac{U_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} U_n^c(x) \cos(n\omega t_k) + U_n^s(x) \sin(n\omega t_k)$$

Où l'on note :

T_k $k \in [1, N]$ est l'intervalle discrétisé $[0;T]$

$U_k(x) = U(x, t_k)$, les déplacements à chaque instant t_k .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$U_n^{c/s}$ les coefficients du développement en série de Fourier des déplacements. Nous les calculons par une intégration temporelle de type trapèze.

$$U_n^c = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (U_{k+1} \cos(n\omega t_{k+1}) + U_k \cos(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

$$U_n^s = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (U_{k+1} \sin(n\omega t_{k+1}) + U_k \sin(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

De même, nous pouvons décomposer en série de Fourier les vecteurs forces et vecteurs forces plastiques.

$$F_k = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} F_n^c \cos(n\omega t_k) + F_n^s \sin(n\omega t_k)$$

$$Q_k = \frac{F_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} Q_n^c \cos(n\omega t_k) + Q_n^s \sin(n\omega t_k)$$

Avec :

$$F_n^c = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (F_{k+1} \cos(n\omega t_{k+1}) + F_k \cos(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

$$F_n^s = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (F_{k+1} \sin(n\omega t_{k+1}) + F_k \sin(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

$$Q_n^c = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (Q_{k+1} \cos(n\omega t_{k+1}) + Q_k \cos(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

$$Q_n^s = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N-1} (Q_{k+1} \sin(n\omega t_{k+1}) + Q_k \sin(n\omega t_k)) \frac{(t_{k+1} - t_k)}{2}$$

On suppose la matrice $K(t)$ constante au cours du cycle. L'équation (47) est alors équivalente à l'égalité suivante :

$$K.FOU[U(t)] = FOU[F(t) + Q(t)] \quad (48)$$

où l'opérateur $FOU[]$ représente l'opération de décomposition en série de Fourier.

L'unicité de la décomposition en série de Fourier d'une fonction permet d'écrire l'équation (48) sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} K.U_0 = F_0 + Q_0 \\ K.U_n^c = F_n^c + Q_n^c \\ K.U_n^s = F_n^s + Q_n^s \end{cases} \quad \text{pour } n = 1, \dots, N/2 \quad (49)$$

La solution de (49) est l'ensemble des coefficients $U_n^{c/s}$ qui sont les coefficients de la décomposition en série de Fourier du champ des déplacements.

A partir de ces coefficients, il est alors possible de déterminer les coefficients de la décomposition des déformations associées aux champs de déplacement qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{2}(\nabla U_0 + {}^t\nabla U_0) \\ \varepsilon_n^{c/s} &= \frac{1}{2}(\nabla U_n^{c/s} + {}^t\nabla U_n^{c/s})\end{aligned}\quad \text{pour } n = 1, \dots, N/2 \quad (50)$$

Il est classique d'admettre que les « premières » harmoniques de sa décomposition en série de Fourier permettent de représenter correctement l'évolution d'une fonction périodique. Dans la méthode cyclique directe, il n'est donc pas nécessaire de résoudre le système (49) pour les $N+1$ harmoniques. Nous pouvons nous limiter à un nombre suffisamment petit pour limiter les temps de calcul, mais suffisamment grand pour ne pas altérer la qualité de la solution. Nous verrons dans le quatrième chapitre l'influence du nombre de termes de Fourier utilisés sur la solution.

De plus ce nombre de termes peut évoluer au cours des itérations : il est possible de débiter pour les premières itérations avec un nombre faible pour donner une approximation grossière de la solution, puis d'augmenter ce nombre de termes au fur et à mesure de la convergence de la solution.

Nous avons supposé dans l'écriture de l'équation (49) la matrice d'élasticité K constante sur tout le cycle. Sans cette hypothèse, il est nécessaire de faire la décomposition du produit $K(t).U(t)$ dans le premier membre de l'équation (48).

Le passage au système (49) n'est plus possible car cela entraîne un couplage entre les différentes harmoniques : chaque équation contient des termes des différentes harmoniques de la décomposition en série de Fourier.

Cependant, il est possible de tenir compte de la dépendance à la température des paramètres élastiques en ajoutant un terme de rappel dans le second membre de l'équation et en prenant comme paramètres pour la matrice de rigidité constante, les paramètres élastiques les plus élevés. Le terme de rappel est le produit entre une matrice correctrice et les déplacements de l'itération précédente. La matrice correctrice prend en compte l'écart entre la matrice de rigidité utilisée et les paramètres réels dépendant de la température.

La prise en compte des paramètres élastiques dépendant de la température est programmée dans l'implémentation de la méthode cyclique directe dans Abaqus.

4.2 Etape locale

L'étape locale permet de construire les champs vérifiant la loi de comportement à tous les instants du cycle et en tout point de la structure. Nous proposons d'utiliser un schéma classique dit de « retour radial » [NGUYEN 77], [SIMO 85] pour déterminer les champs de contraintes, de déformations plastiques et de variables internes vérifiant la loi de comportement.

A l'instant t_i , les déformations plastiques sont connues car elles sont imposées par la condition de périodicité (voir paragraphe suivant). Ensuite, nous utilisons l'algorithme de

retour radial de manière progressive entre les instants t_k et t_{k+1} du cycle pour déterminer l'incrément de déformation plastique et de variables internes.

Connaissant les déformations plastiques et les variables internes à l'instant t_k , et à partir d'un incrément de déformation ($\epsilon_{k+1} - \epsilon_k$) déduit du champ de déplacement solution de l'étape globale, cet algorithme permet de déterminer un incrément de déformation plastique et de variables internes pour définir les champs plastiquement admissibles à l'instant t_{k+1} .

L'algorithme de retour radial se décompose en deux étapes :

- Essai élastique

On détermine une contrainte dite contrainte-test σ_{k+1}^{trial} à partir des contraintes σ_k en supposant un comportement élastique sur l'incrément.

- Projection sur le convexe de plasticité ou de viscoplasticité.

Deux cas peuvent alors se présenter :

La contrainte-test est à l'intérieur du convexe de plasticité. La solution élastique est donc valable.

La contrainte-test se trouve à l'extérieur du convexe de plasticité. Il y a alors écoulement plastique. Il faut donc projeter cette contrainte-test sur le convexe de plasticité.

Cet algorithme est illustré par la figure 23.

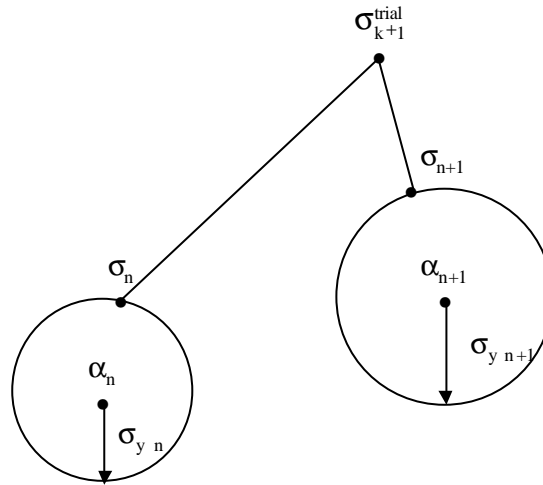


figure 23 : illustration du principe du retour radial dans le cas d'une fonction seuil de Von Mises et un écrouissage cinématique linéaire dépendant de la température

Dans le cadre de ce travail, nous avons programmé deux modèles de comportement : un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et un modèle élasto-viscoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Ce dernier est le modèle issu des travaux de Charkaluk et Verger, [CHARKALUK 99] [VERGER 02], pour simuler les structures en

fonte et en alliage d'aluminium. Nous verrons dans les paragraphes suivants la mise en œuvre numérique de l'algorithme de retour radial dans le cas de ces deux modèles.

4.2.1 Modèle de Prager : Ecouissage cinématique linéaire

Formulation de la loi de comportement

On fait l'hypothèse d'une partition des déformations en déformation élastique et plastique :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p \quad (51)$$

L'énergie libre spécifique ψ qui définit le comportement du matériau dépend des variables d'état observables et des variables internes suivantes :

$$\psi = \psi(\epsilon^e, T, \alpha) \quad (52)$$

où ϵ^e est la déformation élastique,

T la température,

et α la variable tensorielle d'écrouissage.

Les variables thermodynamiques associées sont alors :

- la contrainte : $\mathbf{s} = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e}$
- l'entropie : $s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$
- la variable d'écrouissage : $\mathbf{X} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{2}{3} H \mathbf{a}$

La fonction seuil utilisée est celle de Von Mises :

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{X}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\mathbf{s} - \mathbf{X})\| - \sigma_y \quad (53)$$

L'hypothèse de normalité de Hill généralisée permet d'écrire la loi d'évolution des déformations plastiques et de la variable d'écrouissage :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \\ -\dot{\mathbf{a}} &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \end{aligned} \quad (54)$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur de plasticité.

Le vecteur unitaire définissant la normale extérieure à la fonction seuil s'écrit :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\text{dev}(\mathbf{s} - \mathbf{X})}{\|\text{dev}(\mathbf{s} - \mathbf{X})\|} \quad (55)$$

Application du schéma de retour radial sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$

On suppose les valeurs des déformations plastiques et des variables internes connues à l'instant t_k . On recherche les valeurs à l'instant t_{k+1} .

L'étape globale nous donne l'incrément de déformation totale :

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{e}_{k+1} - \mathbf{e}_k \quad (56)$$

On définit la contrainte relative \mathbf{A}_k par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \text{dev}(\mathbf{s}_k) - H_k \mathbf{e}_k^p \\ &= \text{dev}(\mathbf{C}_k : \mathbf{e}_k) - (2\mu_k + H_k) \mathbf{e}_k^p \end{aligned} \quad (57)$$

On définit la contrainte-test en supposant un comportement élastique sur $[t_k, t_{k+1}]$.

$$\mathbf{A}_{k+1}^* = \mathbf{A}_k + \text{dev}(\Delta \mathbf{C} : \mathbf{e}_k) - 2\Delta \mu \mathbf{e}_k^p + \text{dev}(\mathbf{C}_{k+1} : \Delta \mathbf{e}) - \Delta H \mathbf{e}_k^p \quad (58)$$

soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{A}_{k+1}^* - (2\mu_{k+1} + H_{k+1}) \Delta t \dot{\mathbf{e}}_{k+1}^p \\ &= \mathbf{A}_{k+1}^* - (2\mu_{k+1} + H_{k+1}) \Delta t \dot{\lambda} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (59)$$

or

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A}_{k+1}}{\|\mathbf{A}_{k+1}\|} \quad (60)$$

En reportant cette expression dans l'équation (59) on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \|\mathbf{A}_{k+1}\| &= \mathbf{A}_{k+1}^* - (2\mu_{k+1} \varepsilon_n^p + H_{k+1}) \Delta t \dot{\lambda} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} (\|\mathbf{A}_{k+1}\| + (2\mu_{k+1} \varepsilon_n^p + H_{k+1}) \Delta t \dot{\lambda}) &= \mathbf{A}_{k+1}^* \end{aligned} \quad (61)$$

\mathbf{n} et \mathbf{A}_{k+1}^* ont donc même direction. On peut donc écrire \mathbf{n} , le vecteur unitaire définissant la normale extérieure à la fonction seuil à l'instant t_{k+1} uniquement à partir de la contrainte test.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A}_{k+1}^*}{\|\mathbf{A}_{k+1}^*\|} \quad (62)$$

On a donc

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1}^* - (2\mu_{k+1} + H_{k+1})\Delta t \dot{\lambda} \frac{\mathbf{A}_{k+1}^*}{\|\mathbf{A}_{k+1}^*\|} \quad (63)$$

La fonction seuil doit être nulle en t_{k+1} . Elle s'écrit :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{A}_{k+1}\| = \sigma_y$$

Ceci nous donne :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} (\|\mathbf{A}_{k+1}^*\| - (2\mu_{k+1} + H_{k+1})\Delta t \dot{\lambda}) = \sigma_y \quad (64)$$

Cette équation nous donne l'expression du multiplicateur de plasticité à l'instant t_{k+1} :

$$\Delta t \dot{\lambda} = \frac{\|\mathbf{A}_{k+1}^*\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y}{(2\mu_{k+1} + H_{k+1})} \quad (65)$$

L'incrément de déformation plastique est alors donné par :

$$\Delta \mathbf{e}^P = \Delta t \dot{\lambda} \frac{\mathbf{A}_{n+1}^*}{\|\mathbf{A}_{n+1}^*\|} \quad (66)$$

A partir de cet incrément de déformation plastique, on calcule les déformations plastiques puis les contraintes plastiquement admissibles à l'instant t_{k+1} .

4.2.2 Modèle élastoviscoplastique

Formulation de la loi de comportement

Le modèle élastoviscoplastique utilisé est décrit en détail dans [CHARKALUK 00]. C'est le modèle couramment utilisé dans les simulations thermomécaniques des culasses et des collecteurs d'échappement chez PSA.

L'implémentation de ce modèle dans la méthode cyclique directe fait appel, comme dans le cas de l'élastoplasticité, à la technique du retour radial.

Le modèle s'appuie sur la définition d'une fonction énergie libre ψ et d'un potentiel de dissipation viscoplastique ϕ .

$$\psi = \psi(\varepsilon^e, T, \alpha) \quad (67)$$

$$\phi(\mathbf{s}, T, \mathbf{X}) = \frac{\eta}{m+1} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{s}, \mathbf{X}) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^{m+1} \quad (68)$$

La loi de normalité nous permet d'écrire l'évolution des déformations viscoplastiques et de la variable d'écrouissage.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^{vp} &= \frac{3}{2} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{s}, \mathbf{X}) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^m \frac{\text{dev}(\mathbf{s} - \mathbf{X})}{J_2(\mathbf{s}, \mathbf{X})} \\ \dot{\mathbf{a}} &= \dot{\mathbf{e}}^{vp} \end{aligned} \quad (69)$$

Application du schéma de retour radial sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$

Nous définissons de la même manière que pour le modèle élastoplastique une contrainte-test en supposant un écoulement viscoplastique nul au cours de l'incrément $[t_k, t_{k+1}]$.

$$\mathbf{A}_{k+1}^* = \mathbf{A}_k + \text{dev}(\Delta \mathbf{C} : \mathbf{e}_k) - 2\Delta\mu \mathbf{e}_k^{vp} + \text{dev}(\mathbf{C}_{k+1} : \Delta \mathbf{e}) - \Delta H \mathbf{e}_k^{vp} \quad (70)$$

On montre, de la même manière que pour le modèle élastoplastique, que l'incrément de déformation viscoplastique s'écrit :

$$\Delta \mathbf{e}^{vp} = \lambda_{k+1} \frac{\mathbf{A}_{k+1}^*}{\|\mathbf{A}_{k+1}^*\|} \quad (71)$$

avec :

$$\lambda_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{J_2(\mathbf{A}_{k+1}^*, \lambda_{k+1}) - \sigma_y}{\eta} \right\rangle^m \quad (72)$$

Cette équation (72) peut alors être résolue par une méthode de Newton-Raphson pour déterminer λ_{k+1} et donc déterminer l'incrément de déformation viscoplastique sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

4.3 Condition de périodicité

L'objectif de la méthode cyclique directe est de trouver une réponse périodique de la structure aux sollicitations thermomécaniques imposées.

Akel et Nguyen [AKEL-NGUYEN 89] proposent dans leur méthode cyclique de rechercher localement les champs plastiquement admissibles périodiques. Cela les induit à itérer lors de cette étape locale jusqu'à la convergence vers un état périodique. A partir de cette solution plastiquement admissible périodique, ils déterminent les champs statiquement et cinématiquement admissibles.

Dans la méthode cyclique directe, nous proposons d'imposer cette périodicité des champs au lieu de la rechercher par un processus itératif.

Comme expliqué précédemment, le calcul local des champs plastiquement admissible est effectué en suivant le trajet de chargement à partir de l'instant t_l jusqu'à l'instant t_N . L'état interne obtenu à t_N est à priori, différent de celui de l'état t_l (voir exemple figure 24).

Imposer la condition de périodicité revient à prendre comme nouvel état initial (pour l'itération suivante) l'état final obtenu à cette itération ($t_l \leftarrow t_N$, comme indiqué sur la figure 25).

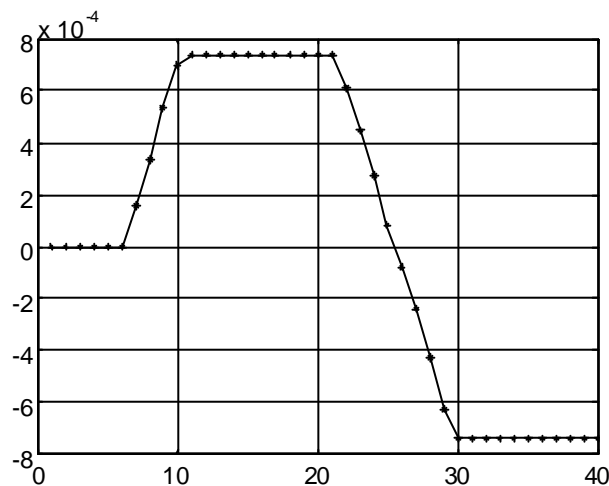


figure 24 : évolution des déformations plastiques après l'étape locale à la première itération

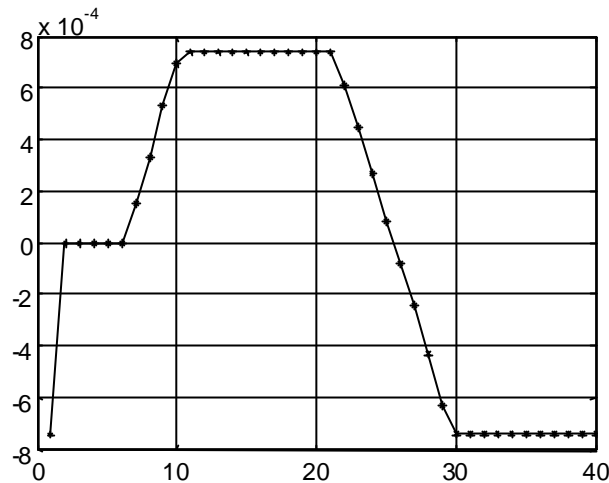


figure 25 : évolution des déformations plastiques après la condition de périodicité

Cependant, ce processus itératif peut conduire à une solution cyclique d'allure comparable à celles données par le calcul incrémental (dans un diagramme σ - ε , on obtient alors des cycles identiques à une translation près) : il s'agit, en fait, de l'influence de l'état initial sur la réponse stabilisée. En effet, il est bien connu ([ZARKA-FRELAT-INGLEBERT-KASMAI NAVIDI], PEIGNEY 02]) que l'état initial de la structure n'a, par exemple, aucune influence sur l'adaptation, mais en revanche, l'état résiduel en dépend.

Pour résoudre ce problème, on n'impose pas la condition de périodicité lors des premières itérations, ce qui revient à effectuer un calcul à grand incrément de temps du premier cycle. D'un point de vue pratique, on fait cinq itérations avant d'appliquer la condition de périodicité.

La correction faite sur un problème thermomécanique est illustré sur la figure 26. La solution en trait plein correspond à l'application de la condition de périodicité après cinq itérations alors que la courbe marquée par des losanges correspond à l'application de la condition de périodicité dès la première itération. La solution incrémentale est beaucoup plus proche de la première solution.

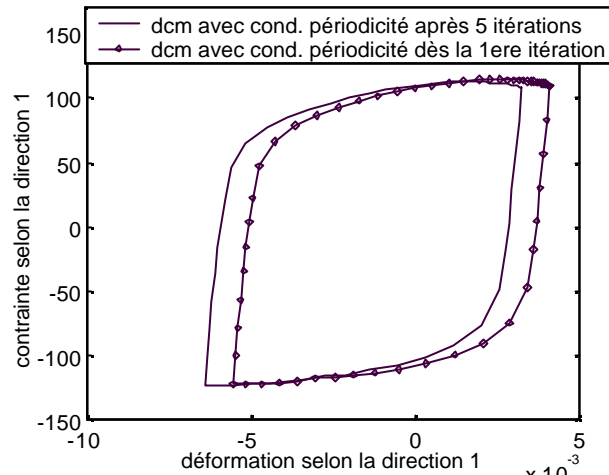


figure 26 : illustration de la différence de la solution finale en fonction de l'application ou non de la condition de périodicité dès la 1^{ère} itération

4.4 Condition d'arrêt

On peut dire que la solution est atteinte lorsque, à tout instant du cycle, les champs de contraintes reliés par la relation de comportement à des champs de déformations cinématiquement admissibles, sont statiquement admissibles.

De plus, ces grandeurs doivent être périodiques pour définir la réponse asymptotique stabilisée de la structure. Si le critère de périodicité n'est pas vérifié, on peut dire que la structure a un comportement de rochet.

La convergence de la méthode est donc mesurée par deux critères :

- Critère d'admissibilité plastique des contraintes calculées à l'étape globale.

On s'assure que les contraintes calculées à l'étape globale donc à tous les instants du cycle et en tout point de la structure vérifient le critère de plasticité.

- Périodicité des déformations plastiques et des variables internes.

On s'assure que les déformations plastiques et les variables internes calculées lors de l'étape locale, au premier et au dernier instant du cycle sont identiques.

La condition d'arrêt est principalement liée à la notion de stabilisation. Cependant, celle-ci est difficile à décrire.

Nous avons vu dans le premier chapitre, que la phase de stabilisation représentait, d'un point de vue physique, une phase pendant laquelle les grandeurs mécaniques n'évoluent pas significativement par rapport aux évolutions de la phase d'adoucissement ou de durcissement cyclique. Cependant, les grandeurs évoluent toujours légèrement d'un cycle à l'autre. Il est donc nécessaire de définir un critère, qui reste subjectif, permettant de définir la stabilisation physique.

D'un point de vue numérique, la notion de stabilisation est tout aussi difficile à définir et reste subjective. En effet, Les définitions proposées dans le chapitre précédent restent théoriques et s'appliquent à des lois de comportement et des chargements assez simples.

Lorsque l'on s'intéresse à des structures tridimensionnelles, soumises à des chargements complexes, on voit que la stabilisation est très lente. La figure 27 illustre la réponse d'une plaque trouée mécanique élastoviscoplastique, soumise à un chargement mécanique. Ce cas test est détaillé dans le chapitre suivant. Dans ces conditions, l'existence de la solution stabilisée est prouvée [HALPHEN 78]. Cependant, il est difficile de donner un critère permettant de définir la stabilisation car on constate toujours une évolution minime des grandeurs mécaniques d'un cycle à l'autre.

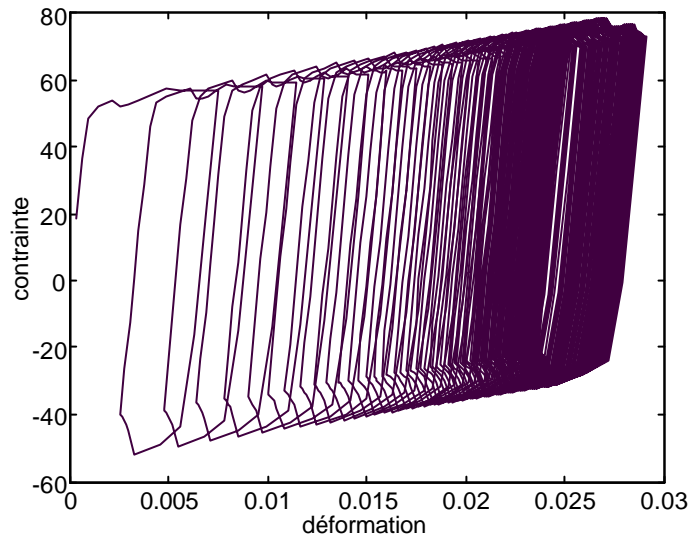


figure 27 : stabilisation d'une plaque élastoviscoplastique

Pour comparer les méthodes incrémentales et cycliques directes, nous utiliserons un critère identique pour considérer la stabilisation de la solution. Ce critère est particulièrement sévère dans les exemples de validation. Cependant, il peut être adapté en fonction de l'application. Par exemple, dans le cas du dimensionnement à la fatigue avec un critère énergétique, il est possible de considérer comme critère de stabilisation, l'évolution de l'énergie dissipée au cours du cycle au fur et à mesure des itérations.

5. Illustration de la méthode

La figure 28 illustre le fonctionnement général de la méthode cyclique directe et son implémentation numérique.

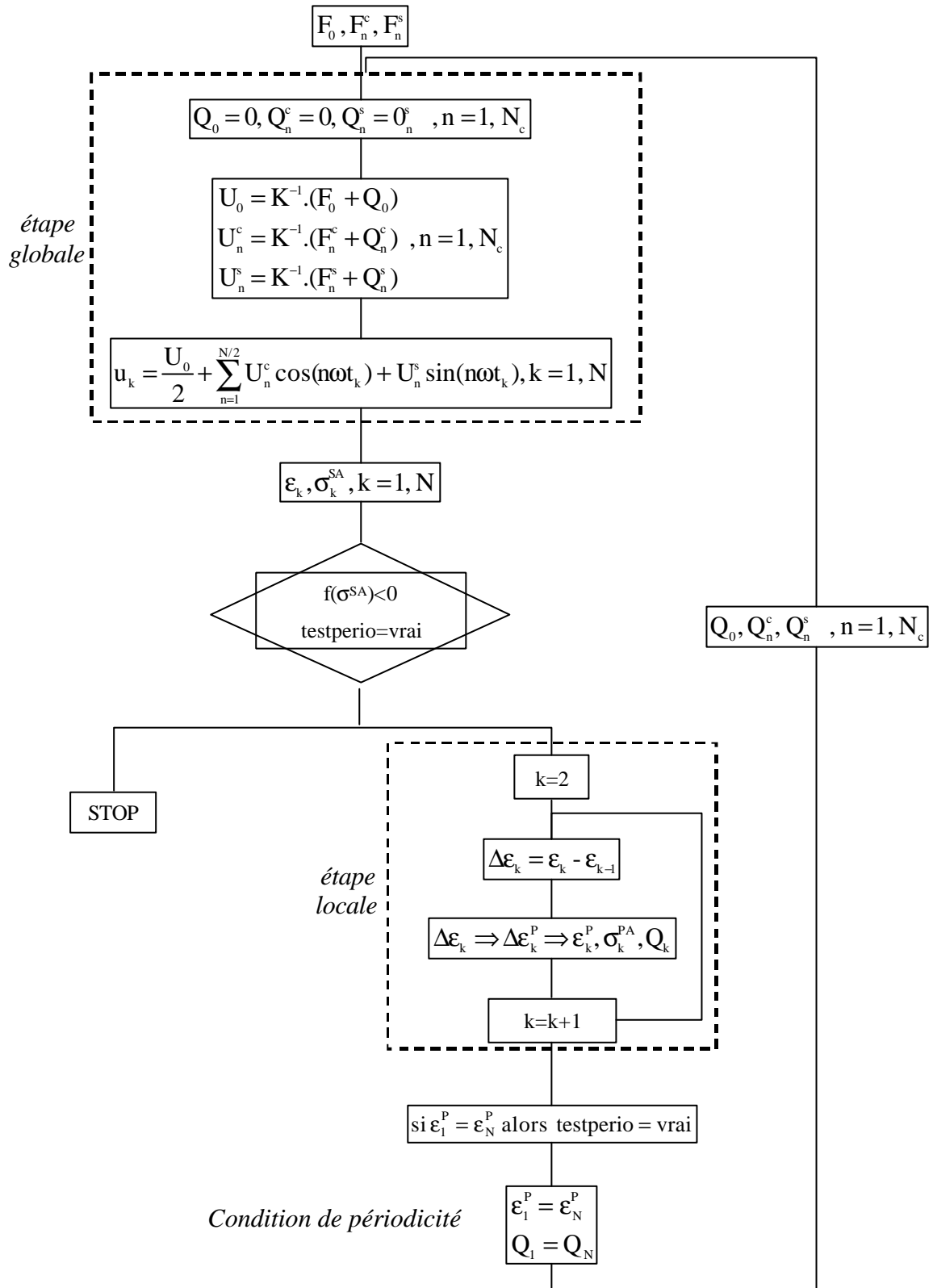


figure 28 : algorithme de la méthode cyclique directe

5.1.1 Résolution d'un problème unidimensionnel

Pour illustrer le fonctionnement de la méthode cyclique directe, nous allons traiter le cas unidimensionnel d'une poutre soumise à un chargement cyclique de traction-compression.

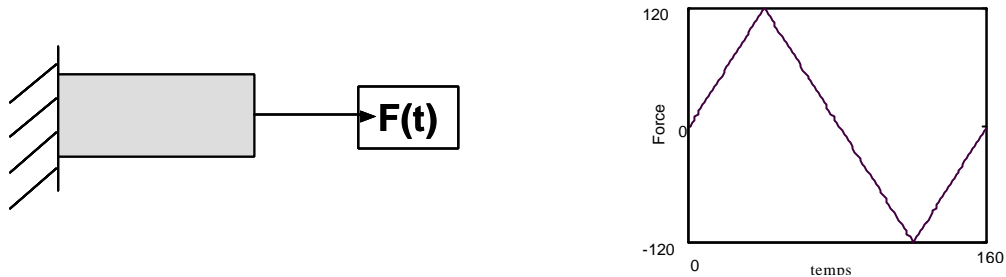


figure 29 : problème unidimensionnel

Le cycle de traction-compression appliqué est un cycle triangulaire périodique entre 120N et -120N, en 160 intervalles de temps.

La loi de comportement utilisée est le modèle de plasticité à écrouissage cinématique linéaire présenté précédemment. Les paramètres utilisés sont :

Module d'élasticité : $E = 60000 \text{ MPa}$

Limite d'élasticité : $\sigma_y = 62 \text{ MPa}$

Pente d'écrouissage : $H = 3201 \text{ MPa}$

La solution, déterminée par un calcul incrémental, est représentée sur la figure 30.

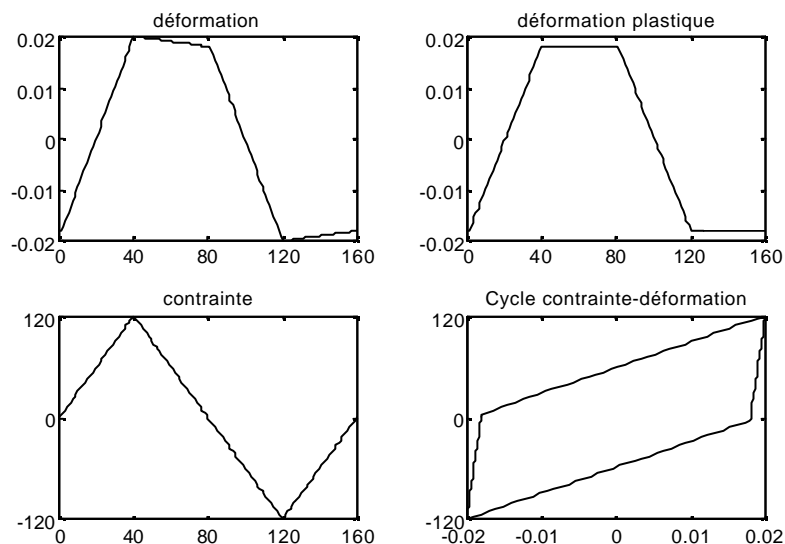


figure 30 : évolution des grandeurs mécaniques du problème de la poutre obtenus par un calcul incrémental

Dans le cadre de ce problème unidimensionnel, nous allons illustrer le principe de la méthode cyclique directe et voir comment on construit la solution du problème au cours des itérations.

L'étape globale sera résolue par décomposition en série de Fourier. Dans cet exemple, nous utilisons toutes les harmoniques disponibles (i.e. 79) dans le calcul de l'étape globale.

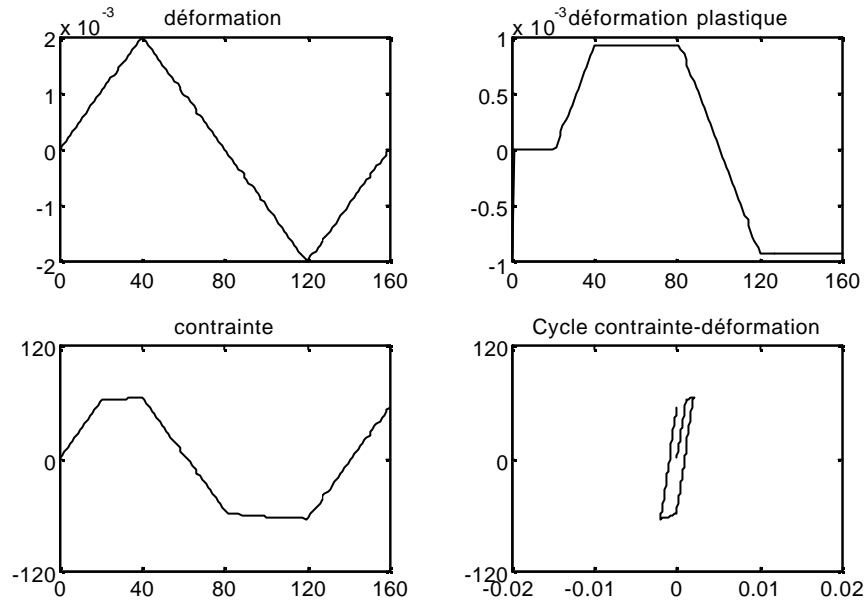


figure 31 : évolution des grandeurs mécaniques du problème de la poutre après la première itération de la méthode cyclique directe

La première itération est illustrée sur la figure 31.

L'étape globale permet de calculer le champ de déformation vérifiant l'équilibre à tous les instants du cycle. L'évolution des déformations correspond à la solution élastique du problème résolue en série de Fourier. Leur évolution est donc proportionnelle au chargement car il n'y a pas de déformation plastique à la première itération.

L'étape locale permet de déterminer les champs plastiquement admissibles (déformations plastiques et contraintes) à partir des déformations calculées à l'étape globale. Sur l'évolution des déformations plastiques, on peut voir l'application de la condition de périodicité avec la valeur des déformations plastiques à l'instant t_i qui est prise égale à celle de l'instant t_N .

La seconde itération est illustrée sur la figure 32. L'évolution des déformations totales calculées à l'étape globale tient compte du rééquilibrage des déformations plastiques calculées à l'itération précédente.

L'étape locale permet de calculer de nouvelles déformations plastiques et de contraintes issues du champ de déformation plastique initial imposé et des valeurs à chaque instant calculées à l'itération précédente.

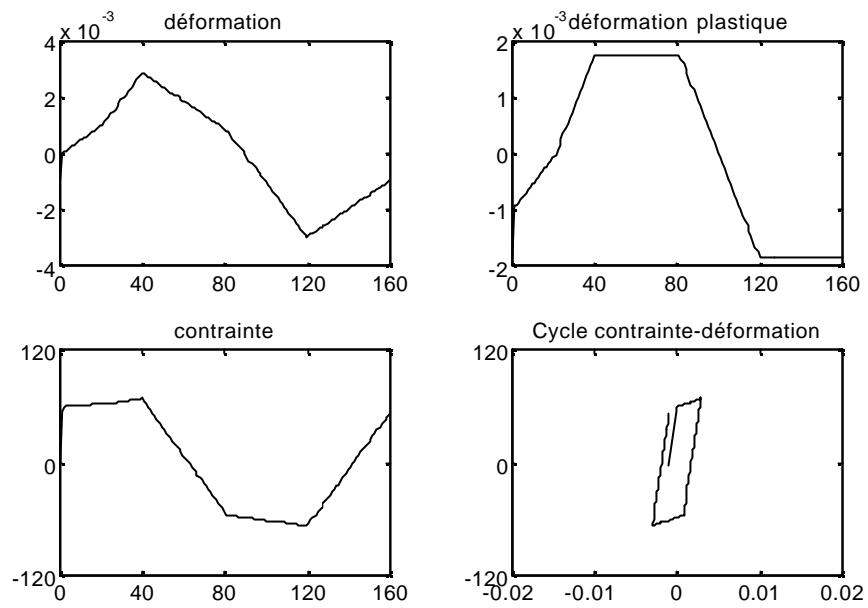


figure 32 : évolution des grandeurs mécaniques du problème de la poutre après la seconde itération de la méthode cyclique directe

La convergence de la méthode cyclique directe est atteinte après 108 itérations. La solution est illustrée sur la figure 33. Elle est identique à celle obtenue par le calcul incrémental.

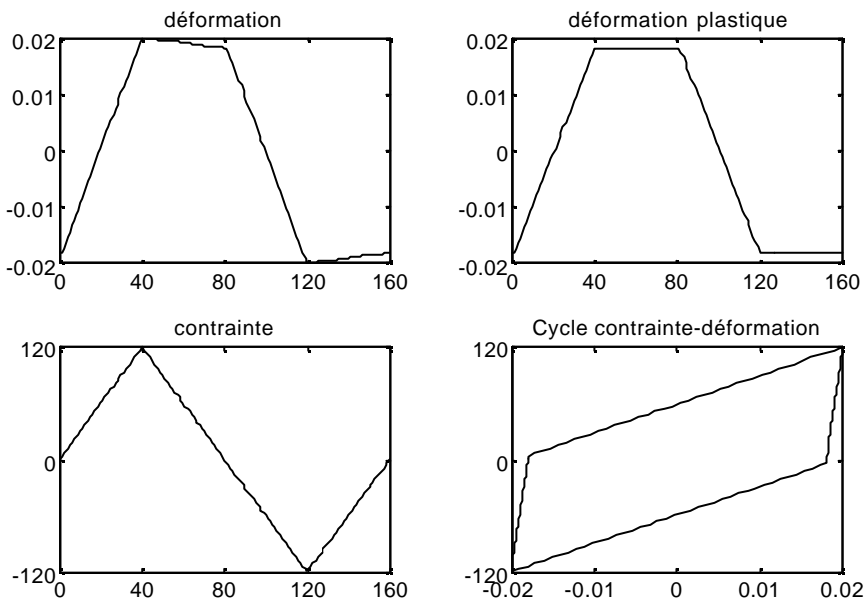


figure 33 : évolution des grandeurs mécaniques du problème de la poutre après convergence de la méthode cyclique directe

La figure 34 montre l'évolution du cycle contrainte déformation au cours des itérations qui tend vers la solution périodique du problème.

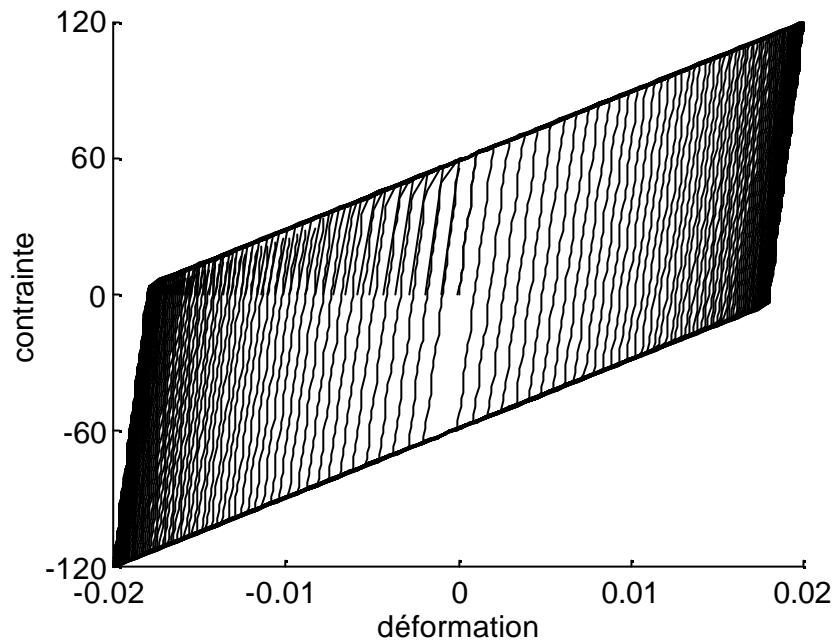


figure 34 : évolution de la solution au cours de la convergence de la méthode

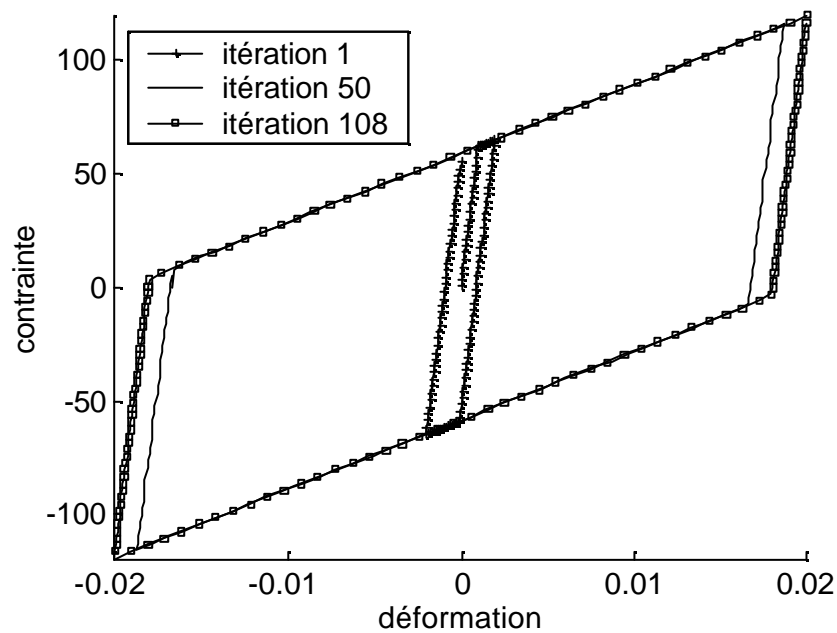


figure 35 : illustration de la solution aux itérations 1, 50 et 108

6. Formulation générale de la résolution d'un problème non linéaire périodique par série de Fourier

6.1 Résolution du problème non linéaire

Nous avons vu dans le paragraphe 4. le principe de la méthode cyclique directe présenté sous la forme d'une séparation des étapes globale et locale. Nous avons ensuite montré comment l'étape globale pouvait être résolue par une recherche des déplacements sous la forme d'une décomposition en série de Fourier. Cette présentation avait l'avantage d'être assez proche d'une présentation classique de la résolution d'un problème non linéaire par les méthodes incrémentales. Cependant, elle peut être écrite d'une manière plus générale [MAÏTOURNAM-POMMIER-THOMAS 02].

Cette présentation s'inspire des travaux de Cardona, [COUNE-CARDONA-GERADIN 92] [CARDONA-COUNE-LERUSSE-GERADIN 94] sur la résolution de problèmes dynamiques non linéaires par décomposition en série de Fourier.

Le problème non linéaire que l'on doit résoudre avec la méthode cyclique directe peut s'écrire sous la forme suivante :

Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ T-périodique, vérifiant, sur l'ensemble du cycle $[0, T]$, le système :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad & \text{CA à } 0 \text{ à l'instant } t, \\ r(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = & - \int_{\Omega} \mathbf{s}(\mathbf{u}, t) : \mathbf{e}(\mathbf{u}, t) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Omega \\ & + \int_{\partial_F \Omega} \mathbf{F}^d(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

C'est un système non-linéaire car les champs de contraintes sont liés aux champs de déplacement par une loi de comportement non-linéaire. Il doit être vérifié à tous les instants du cycle $[0, T]$. Il est périodique ou pseudo-périodique par construction. Il peut donc être décomposé en série de Fourier. Nous nous plaçons dans le cas où le cycle est discrétisé en N instants t_k régulièrement espacés.

$$r_k = \frac{R_0}{2} + \sum_{m=1}^{N/2} R_m^c \cos(m\omega t_k) + R_m^s \sin(m\omega t_k) \quad (74)$$

Où l'on note :

$$r_k = r(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k))$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$R_m^{c/s}$, les coefficients du développement en série de Fourier du résidu. Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_m^c &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \cos\left(\frac{2p}{N} mk\right) \text{ pour } m = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ R_m^s &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r_k \sin\left(\frac{2p}{N} mk\right) \text{ pour } m = 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (75)$$

La fonction $r(t)$ doit être nulle à chaque instant de l'intervalle de temps $[0, T]$. Ceci est équivalent à dire que les termes de sa décomposition en série de Fourier doivent être nuls pour toutes les fréquences.

Au lieu de vérifier l'équation (73) à chaque instant du cycle, il est donc possible de vérifier la nullité de tous les termes de Fourier :

$$\begin{aligned} R_m^c &= 0 \text{ pour } m = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ R_m^s &= 0 \text{ pour } m = 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (76)$$

Les solutions de ce système sont les déplacements, fonction du temps. Cependant, il est préférable de les rechercher sous la forme de série de Fourier. On peut les écrire :

$$u_k = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} U_n^c \cos(n\omega t_k) + U_n^s \sin(n\omega t_k) \quad (77)$$

avec :

$$\begin{aligned} U_n^c &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \text{ pour } n = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ U_n^s &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \text{ pour } n = 1, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (78)$$

On remplace donc N équations dans l'espace temporel de l'équation (73) discrétisé en N instants, par N équations du type (76) qui seront résolues dans l'espace fréquentiel.

Ce système d'équations est constitué d'équations non linéaires. En effet, la définition des coefficients de Fourier est non linéaire du fait des non linéarités de $r(t)$.

Pour résoudre ce système, nous allons utiliser un schéma de Newton. Le principe de cette méthode, comme nous l'avons vu précédemment, consiste à remplacer un problème non-linéaire de type $f(y)=0$ par la construction itérative de y_i se rapprochant progressivement de la solution.

$$\tan(\theta) = f'(y_i) = \frac{f(y_i)}{y_i - y_{i+1}} \quad (79)$$

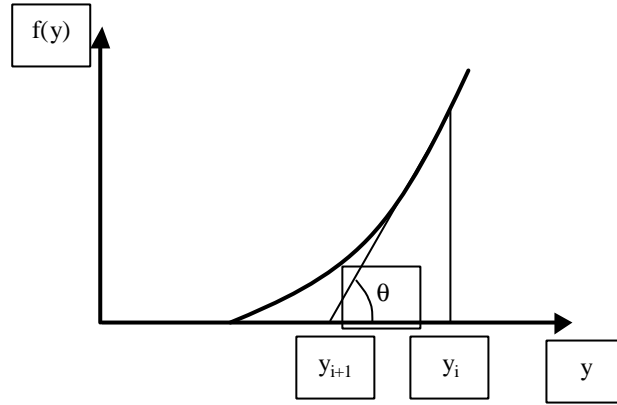


figure 36 : illustration de la méthode de Newton

Dans notre cas, ce sont les coefficients de Fourier des déplacements qui sont les inconnues du système (76). La méthode de Newton va donc nous permettre de construire de manière itérative des coefficients de Fourier $(U_n^{c/s})^{i+1}$ qui tendent progressivement vers la solution recherchée.

$$(U_n^{c/s})^{i+1} = (U_n^{c/s})^i + (\Delta U_n^{c/s})^{i+1} \quad (80)$$

L'incrément des coefficients de Fourier des déplacements $(\Delta U_n^{c/s})^{i+1}$ est donné par la résolution du système suivant :

$$(\Delta U_n^{c/s})^{i+1} = M^{-1} (R_m^{c/s})^i \quad (81)$$

avec M la matrice tangente suivante :

$$M = \left[\frac{\partial R_m^{c/s}}{\partial U_n^{c/s}} \right] \quad (82)$$

Dans le cadre de ce processus itératif, nous retrouvons donc la résolution du problème non linéaire (73) en deux étapes.

- La première étape consiste donc à déterminer l'incrément des coefficients de Fourier des déplacements solution de l'équation (81).
- La seconde étape consiste à déterminer un nouveau résidu $(R_m^{c/s})^i$ qui vérifie la loi de comportement. C'est une résolution locale.

Il reste cependant à exprimer la matrice tangente pour compléter ce schéma. Pour illustrer les détails du développement de la matrice tangente, nous allons exprimer le terme $\frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c}$.

L'équation (76) donne l'expression des coefficients de Fourier du résidu en fonction de l'évolution temporelle des déplacements. Il est possible de les exprimer en fonction des coefficients de Fourier des déplacements :

$$R_m^c = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} r \left(\frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} U_n^c \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + U_n^s \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right) \cos\left(\frac{2\pi}{N} mk\right) \quad (83)$$

On dérive l'expression précédente par rapport aux termes U_n^c :

$$\frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \frac{\partial r}{\partial u}(u_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} mk\right) \quad (84)$$

On note $c_k = \frac{\partial r}{\partial u}(u_k)$, la matrice tangente dans l'espace temporel à l'instant t_k .

En tenant compte des égalités trigonométriques, on peut développer les produits de cosinus :

$$\frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(\cos\left(\frac{2\pi}{N} (n+m)k\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{N} (n-m)k\right) \right) \quad (85)$$

On retrouve dans l'équation (85) la définition des coefficients du développement en série de Fourier de la matrice tangente $c(t_k)$:

$$\begin{aligned} C_k^c &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \\ C_k^s &= \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right) \end{aligned} \quad (86)$$

avec :

$$\frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c} = \frac{1}{2} (C_{n+m}^c + C_{n-m}^c) \quad (87)$$

De la même façon, on peut déterminer l'expression des autres termes de la matrice M :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c} &= \frac{1}{2} (C_{n+m}^c + C_{n-m}^c) \\
 \frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^s} &= \frac{1}{2} (C_{n+m}^s + C_{n-m}^s) \\
 \frac{\partial R_m^s}{\partial U_n^c} &= \frac{1}{2} (C_{n+m}^s - C_{n-m}^s) \\
 \frac{\partial R_m^s}{\partial U_n^s} &= \frac{1}{2} (C_{n-m}^c - C_{n+m}^c)
 \end{aligned}
 \quad \text{pour } n, m = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (88)$$

Les termes extrêmes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R_0^c}{\partial U_n^c} &= C_n^c & \frac{\partial R_0^s}{\partial U_n^s} &= C_n^s \\
 \frac{\partial R_m^c}{\partial U_0^c} &= \frac{1}{2} C_m^c & \frac{\partial R_m^s}{\partial U_0^s} &= C_m^s \\
 \frac{\partial R_{N/2}^c}{\partial U_n^c} &= C_{N/2-n}^c & \frac{\partial R_{N/2}^s}{\partial U_n^s} &= C_{N/2-n}^s \\
 \frac{\partial R_m^c}{\partial U_{N/2}^c} &= C_{N/2-m}^c & \frac{\partial R_m^s}{\partial U_{N/2}^s} &= C_{N/2-m}^s
 \end{aligned}
 \quad \text{pour } n, m = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (89)$$

On a donc l'expression de la matrice tangente M :

$$M = \left[\frac{\partial R_m^{c/s}}{\partial U_n^{c/s}} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_0^c & \dots & C_n^c & C_n^s & \dots & C_{N/2}^c \\ \vdots & & & & & \\ C_m^c & (C_{m+n}^c + C_{n-m}^c) & (C_{m+n}^s + C_{n-m}^s) & C_{N/2-m}^c & & \\ C_m^s & (C_{m+n}^s + C_{n-m}^s) & (C_{n-m}^c - C_{n+m}^c) & C_{N/2-m}^s & & \\ C_{N/2}^c & C_{N/2-n}^c & C_{N/2-n}^s & C_0^c & & \end{bmatrix} \quad (90)$$

Cette matrice est de taille N*nombre de ddl. Elle est symétrique. Cette matrice rend la résolution du système assez complexe. En effet, la résolution de ce système est couplée pour toutes les harmoniques.

Cependant, si l'on considère la matrice c(t) constante au cours du temps, il ne reste dans la matrice M uniquement les termes en C_0^c . La matrice M est alors diagonale. On retrouve alors la forme de la méthode cyclique directe énoncée précédemment.

$$M = \left[\frac{\partial R_m^{c/s}}{\partial U_n^{c/s}} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C_0^c & & & \\ & C_0^c & 0 & \\ & 0 & C_0^c & \\ & & & C_0^c \end{bmatrix}$$

La méthode cyclique directe développée dans ce chapitre s'inscrit dans la continuité de l'approche globale présentée précédemment en proposant une stratégie de résolution adaptée aux cas des problèmes anisothermes non-linéaires soumis à des chargements cycliques.

La stratégie de résolution séparée des équations globales et locales sur l'ensemble du cycle permet un traitement original de la résolution des équations globales par projection des équations d'équilibre sur une base fréquentielle.

De plus, les techniques utilisées dans la résolution restent proches des techniques classiques de résolution (discrétisation spatiale par éléments finis, résolution de problème type problème élastique $KU=F$, résolution locale incrémentale par projection orthogonale,...) et permettent ainsi une intégration facile et robuste dans un code de calcul classique.

Chapitre IV

Validation numérique

Après la présentation de la méthode cyclique directe et une illustration sur un cas unidimensionnel, nous présentons dans le présent chapitre, des résultats de calcul obtenus sur des structures et illustrons ainsi la convergence de la méthode cyclique directe vers la solution obtenue par un calcul incrémental.

La méthode cyclique directe a tout d'abord été programmée dans le code de calcul matlab et représente ainsi une grande partie de ce travail de thèse. Par la suite, une collaboration entre PSA Peugeot-Citroën et Abaqus Inc. a permis le développement de la méthode cyclique directe dans la version commerciale du logiciel Abaqus. Une version test nous a permis d'élargir la validation numérique de la méthode à des structures ayant un plus grand nombre de degrés de liberté et ainsi étudier le gain de temps de la méthode par rapport aux simulations classiques sur des calculs industriels.

1. Programmation de la méthode cyclique directe

La mise en œuvre numérique de ce travail a été faite sous le logiciel Matlab. Ce travail permet de tester la méthode cyclique directe sur des structures soumises à des chargements thermomécaniques cycliques. Le chargement thermique correspond à l'évolution du champ de température en tout point de la structure. Il est issu d'un calcul thermique obtenu par le logiciel Abaqus.

Le maillage des structures étudiées est lu à partir d'un fichier au format universel qui définit l'ensemble des nœuds, la connectivité des éléments, les conditions aux limites et les forces nodales appliquées.

Les éléments utilisés dans les maillages sont des éléments tétraédriques quadratiques à 10 nœuds. Ces éléments sont utilisés chez PSA car ils permettent des gains de temps considérables lors des phases de maillages par l'utilisation de mailleurs automatiques. La formulation de cet élément peut être retrouvée dans [BATOZ-DHATT 95] et est identique à celle utilisée dans Abaqus.

Les lois de comportement programmées sont la loi élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire et la loi élastoviscoplastique dont les descriptions sont faites dans le chapitre précédent.

Les paramètres inélastiques des lois de comportement sont considérés dépendants de la température. Par contre, les caractéristiques élastiques sont laissées indépendantes de la température.

Ce programme permet ainsi de traiter des problèmes dont la taille de maillage atteint les 15000 ddl.

Dans la suite de ce chapitre, nous présentons des comparaisons de résultats obtenus avec la méthode cyclique directe à ceux obtenus par une approche incrémentale classique, programmée dans le code de calcul Abaqus [HIBBITT-KARLSSON-SORENSEN, 98].

2. Cas tests avec la version programmée dans Matlab

2.1 Cube isotherme élastoplastique

Afin de valider la programmation de la méthode cyclique, nous comparons les résultats obtenus sur une structure simple, constituée d'un cube soumis à un chargement de traction-compression cyclique.

Ce cube de côté unitaire est constitué de 35 nœuds et 12 éléments (figure 37).

Tous les nœuds du plan Oxy sont bloqués en déplacement selon z. Les nœuds des plans Oxz et Oyz sont respectivement bloqués selon les directions y et x. Le chargement est une pression appliquée sur la face supérieure.

Ces conditions aux limites et ce chargement permettent d'avoir des champs mécaniques homogènes dans la structure.

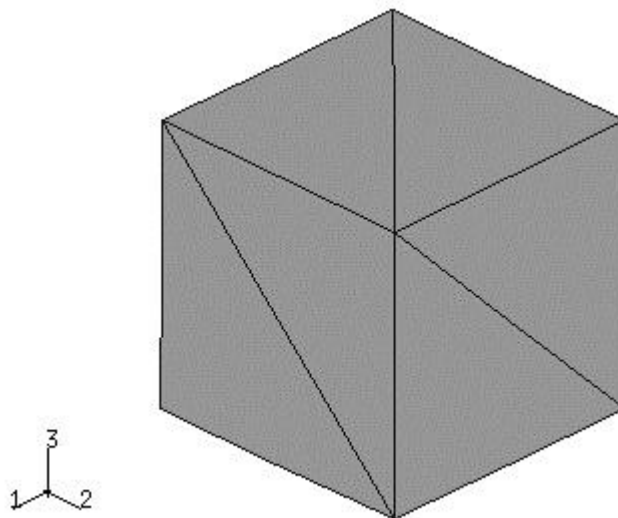


figure 37 :maillage du cube étudié

La loi de comportement utilisée dans ce cas est le modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire décrit précédemment.

Les paramètres matériaux utilisés sont les suivants :

Module d'élasticité : 60000 MPa

Limite d'élasticité : 62 MPa

Pente d'écrouissage : 2134 MPa

L'évolution de la pression de traction-compression appliquée est symétrique, entre les valeurs de $\pm 120\text{MPa}$. Elle est appliquée en quarante incréments de temps comme cela est représenté sur la figure 38.

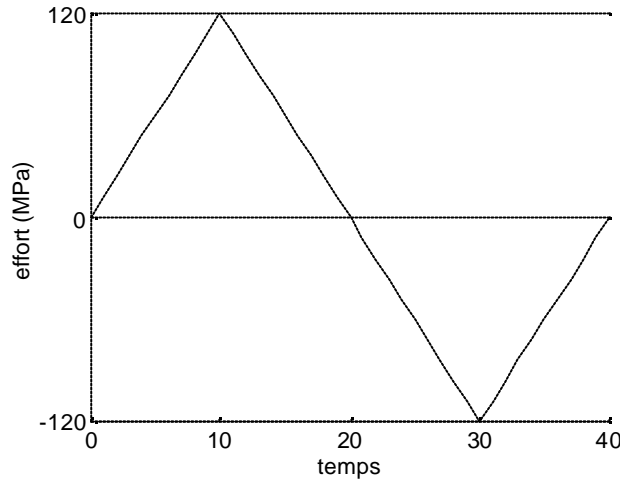


figure 38 : chargement de traction compression appliqué sur le cube

Calcul incrémental

La solution incrémentale, donne la solution stabilisée après deux cycles de chargement. La figure 39 montre les évolutions en un point de gauss de l'un des éléments, des déformations, contraintes, déformations plastiques et le cycle contrainte déformation dans la direction de chargement.

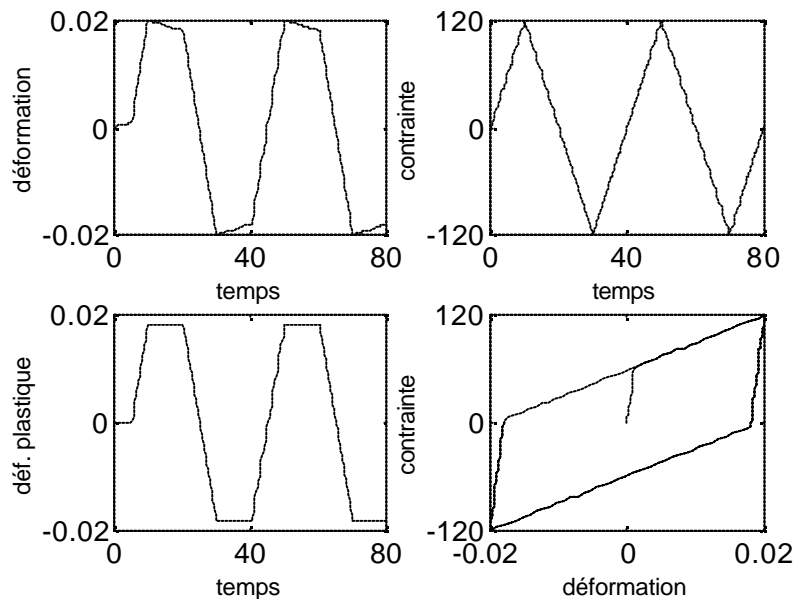


figure 39 : résultat obtenu par un calcul incrémental sur le problème du cube

Calcul cyclique direct

La figure 40 montre la solution de la méthode cyclique directe. Cette solution a été obtenue après 120 itérations. Le nombre de termes de Fourier utilisé est 20. Elle est proche de la solution incrémentale. Cependant, les déformations totales atteignent la valeur de 1.8% au lieu des 2% obtenus par la méthode incrémentale. Cela s'explique par le nombre de termes de Fourier utilisés qui n'est pas suffisant pour obtenir une solution identique à la solution incrémentale. Nous verrons dans le paragraphe 4.1 de ce chapitre, la possibilité de tendre vers la solution exacte en augmentant le nombre de termes de Fourier.

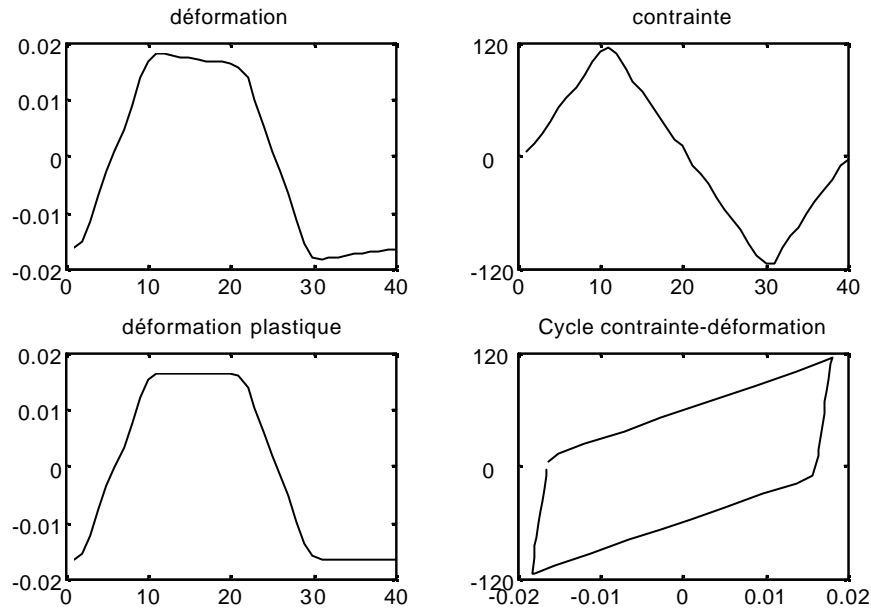


figure 40 : évolution des grandeurs mécaniques à convergence

L'évolution de la convergence peut être suivie en traçant l'évolution de la déformation maximale (à 10 secondes de chargement) en fonction du nombre d'itérations (figure 41). La solution évolue rapidement dans un premier temps (jusqu'à une soixantaine d'itérations) puis beaucoup plus lentement dans une deuxième phase. L'évolution de la solution d'une itération à l'autre vient de l'amplitude de déformation plastique qui est appliquée lors de la condition de périodicité. Comme cette amplitude tend vers 0 au fur et à mesure de la convergence lorsque la solution devient périodique, la solution évolue de plus en plus lentement.

On voit qu'au delà des 120 itérations, la solution n'évolue plus. La convergence est atteinte et la solution est stable.

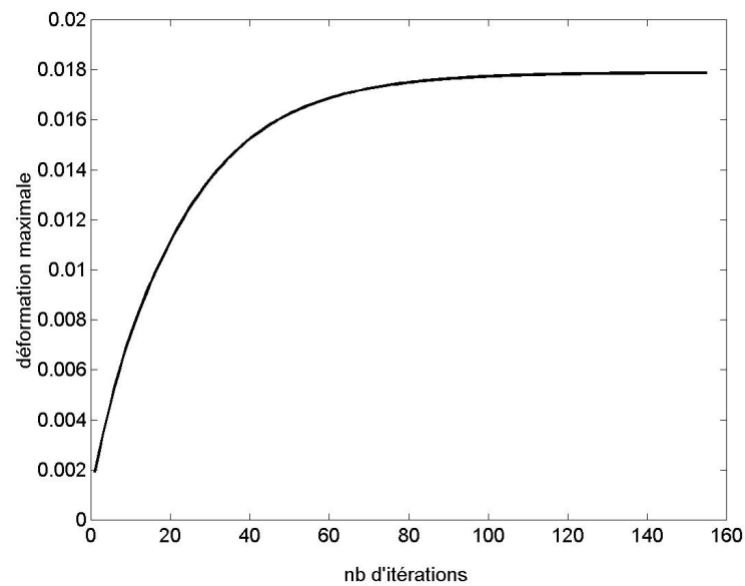


figure 41 : évolution de déformation maximale en fonction du nombre d'itérations

L'évolution du cycle contrainte déformation au cours des itérations, selon la direction de traction, montre que l'on obtient une bonne approximation de la solution dès 80 itérations (figure 42).

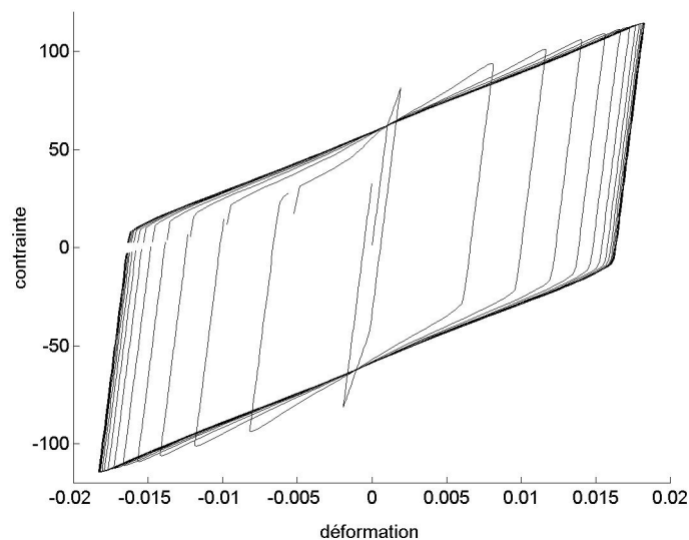


figure 42 : évolution du cycle contrainte déformation toutes les 10 itérations

2.2 Cube anisotherme élastoviscoplastique

On reprend la structure étudiée précédemment, mais on change le modèle de comportement. On utilise la loi élastoviscoplastique décrite dans le chapitre précédent.

De plus, la structure est soumise à un chargement mécanique et thermique cyclique :

- une température est appliquée à tous les nœuds de la structure au cours du temps : la température initiale est de 30°C à tous les nœuds. Elle évolue linéairement jusqu'à 300°C en 15 secondes puis est maintenue constante pendant 30 secondes à 300°C avant de diminuer linéairement jusqu'à 30°C en 15 secondes.
- Le chargement mécanique appliqué est indiqués sur la figure 43.

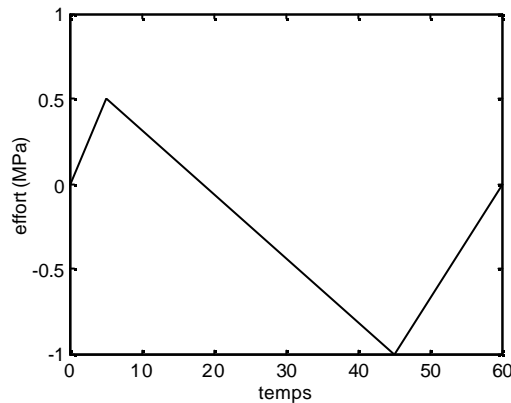


figure 43 : évolution du chargement appliqué sur le cube

La structure s'accommode après 6 cycles dans le calcul incrémental. La méthode cyclique donne un résultat tout à fait comparable en 250 itérations avec 20 termes de Fourier comme cela est indiqué sur la figure 44.

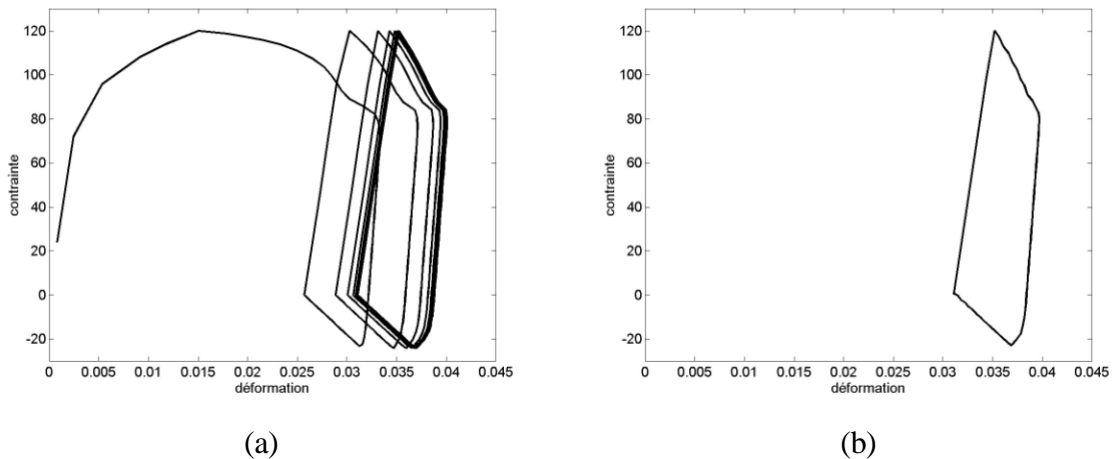


figure 44 : cycle contrainte déformation stabilisé obtenu par la méthode incrémentale (a) et la méthode cyclique directe (b)

Ces deux cas tests nous permettent de valider la programmation de la méthode pour les chargements mécaniques et thermomécaniques, avec les deux modèles de comportement que l'on étudie.

2.3 Plaque trouée mécanique

Nous nous intéressons maintenant à une plaque trouée, épaisse, élastoviscoplastique soumise à un chargement mécanique de traction-compression. Ce cas est particulièrement intéressant pour la validation numérique car la plaque comporte un effet de structure, avec des gradients importants des champs mécaniques et une concentration de contrainte dans la zone proche du trou. De plus, suivant le chargement, il est possible d'avoir des zones élastiques, adaptées ou accommodées qui coexistent dans la structure. Ce problème représente alors l'ensemble des difficultés que l'on peut rencontrer sur des structures industrielles.

Les caractéristiques élastiques du matériau sont considérées indépendantes de la température. Comme la loi de comportement utilisée répond à la définition d'un matériau standard généralisé, la structure a nécessairement un état stabilisé en contrainte et en déformation [HALPHEN 78].

Compte tenu de la symétrie de la géométrie et du chargement, le maillage de cette plaque ne représente qu'un quart de la structure et est tridimensionnel.

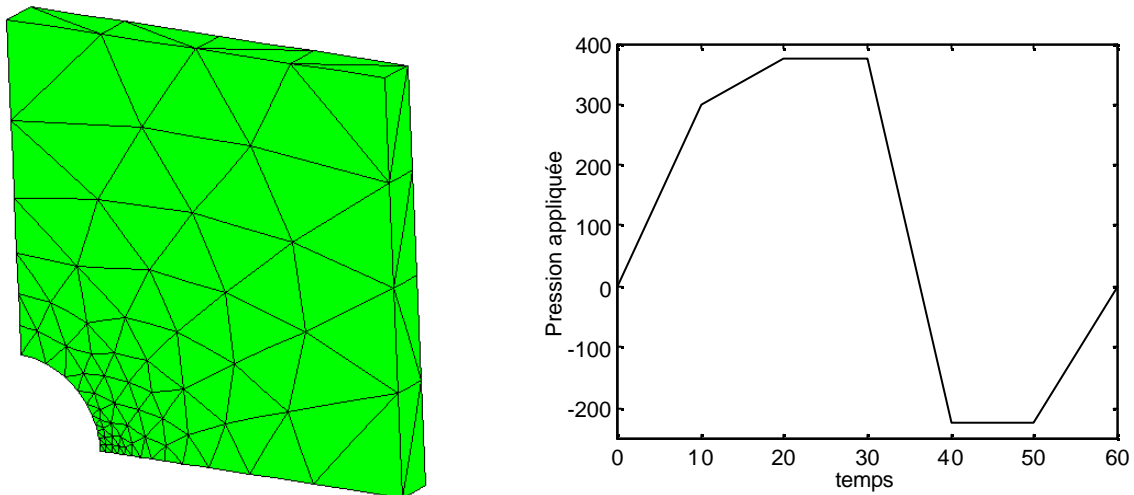


figure 45 : maillage de la plaque trouée et chargement appliqué

On applique une pression sur le côté supérieur de la plaque. Cette pression évolue de manière cyclique comme indiquée sur la figure 45 entre 400 et -200MPa.

La figure 46 illustre les cycles contrainte-déformation suivant la direction de chargement, sur l'élément le plus chargé, situé le long du trou.

L'évolution d'un cycle à l'autre est rapide au début puis devient de plus en plus lente au fur et à mesure de la stabilisation. Cette évolution lente du cycle se retrouve aussi bien dans le calcul incrémental que la méthode cyclique directe. Afin de garder une cohérence entre les deux méthodes, on considère la stabilisation atteinte lorsque l'écart entre les déformations à la fin de chaque cycle est inférieur à 0,1% des déformations.

Par le calcul incrémental, la stabilisation de la structure est atteinte après 100 cycles.

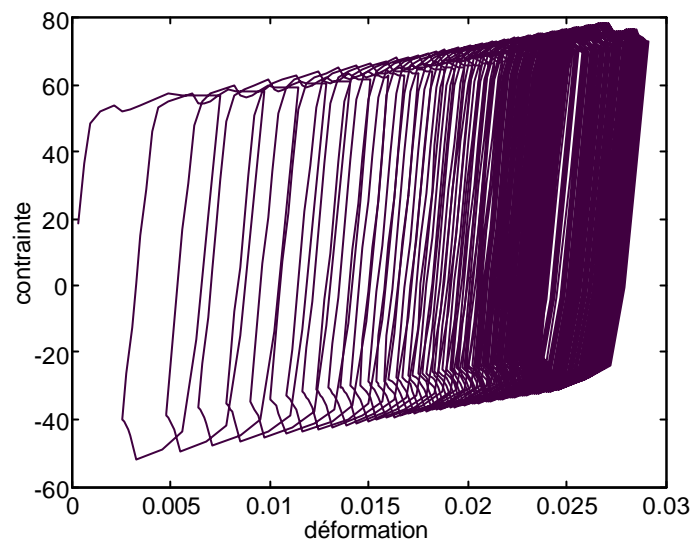


figure 46 : cycle contrainte déformation au point le plus chargé obtenu par un calcul incrémental

La méthode cyclique directe converge vers une solution stabilisée en 264 itérations. Le nombre de termes de Fourier utilisé est de 60.

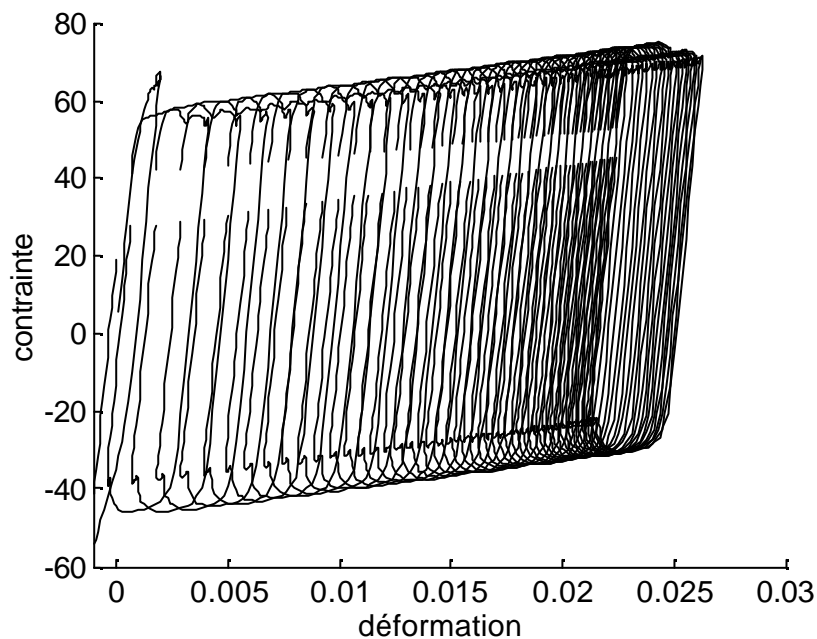


figure 47 : évolution du cycle contrainte déformation toutes les 5 itérations par la méthode cyclique directe

Le cycle stabilisé contrainte-déformation est comparé à celui obtenu par le calcul incrémental sur la figure 48. Les solutions sont quasiment équivalentes par les deux

méthodes. La forme du cycle est bien représentée, tandis que le niveau de déformations moyennes de la solution de la méthode cyclique directe reste légèrement sous évalué.

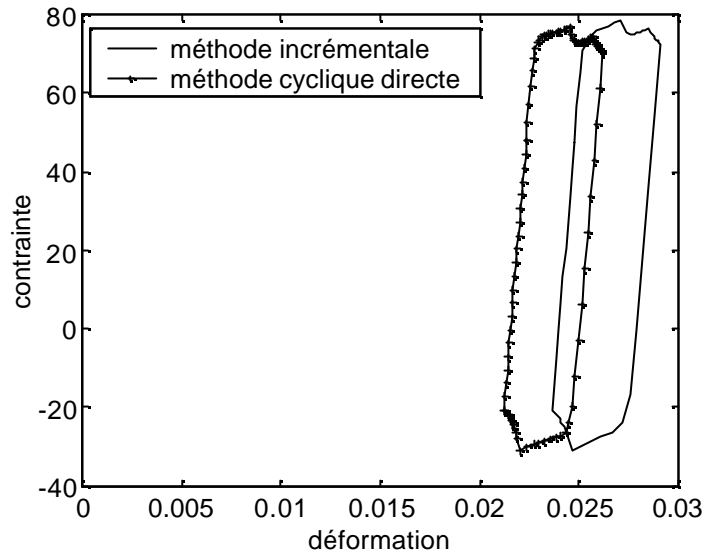


figure 48 : comparaison de la solution stabilisée par le calcul incrémental et la DCM.

Les champs de déformations inélastiques sont très proches comme on peut le voir sur la figure 49.

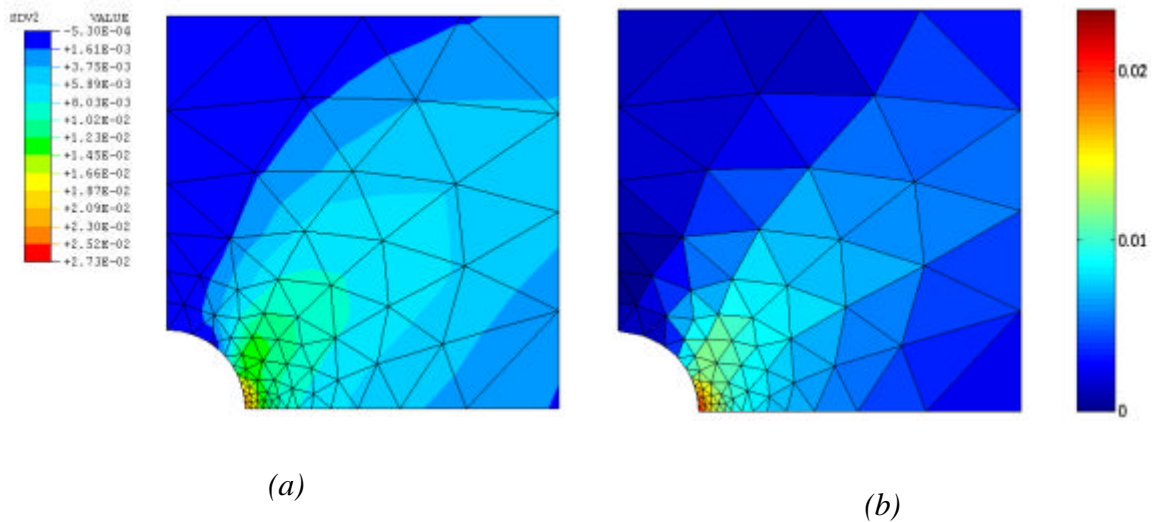


figure 49 : champs de déformation inélastique à la fin du cycle stabilisé par le calcul incrémental (a) et par la DCM (b).

2.4 Exemple de la plaque pontet

Dans la limite des tailles de maillages acceptables dans le programme développé sous Matlab, nous avons développé un cas de calcul permettant de représenter un comportement

simplifié mais proche de celui rencontré sur culasse et notamment dans la partie la plus sollicitée, le pontet inter-soupapes.

La géométrie est celle représentée sur la figure 50 (a). Elle représente la moitié du pontet inter-soupapes. Le reste de la culasse est modélisé par un blocage des déplacements sur les trois cotés, pour représenter le bridage que constitue les zones plus froides de la culasse par rapport à la zone du pontet. La zone des soupapes est laissée libre en déplacement.

Un calcul thermique permet de définir le champ de température dans la pièce. La zone du pontet effectue un cycle thermique entre 30°C et 230°C en 30 secondes comme indiqué sur la figure 50 (b) alors que la température sur les trois cotés bridés est imposée, avec un cycle entre 30 et 50°C.

Le champ de température obtenu après 10 secondes de cycle est illustré sur la figure 50 (a).

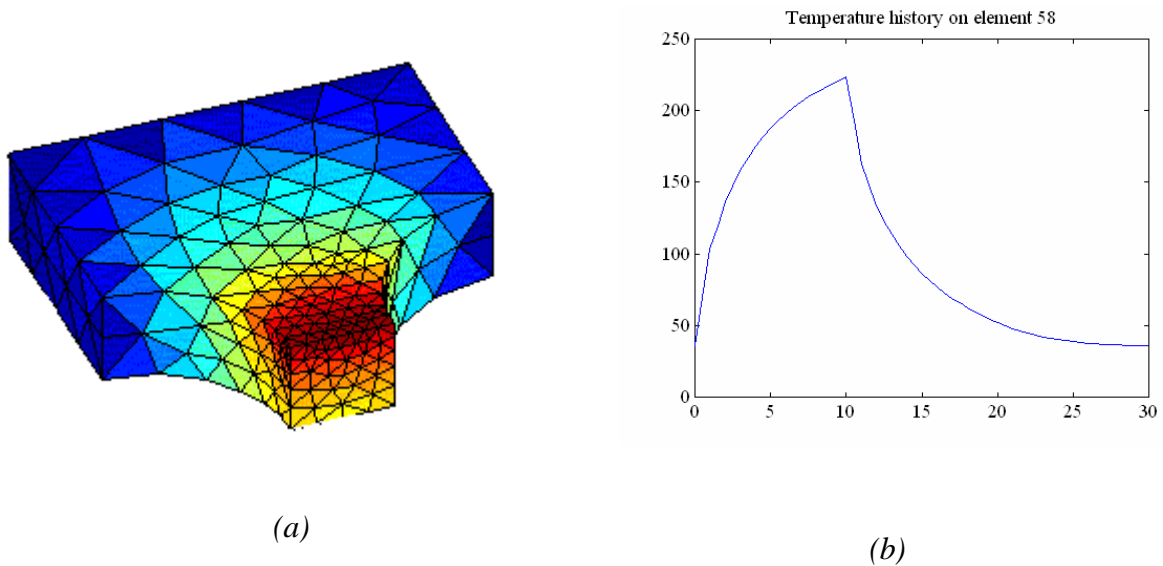


figure 50 : champ de température (a) et évolution de la température (b) appliqués sur la plaque pontet

Le calcul incrémental stabilise en 155 cycles. On considère que la stabilisation est obtenue lorsque les déformations, au point le plus chargé, évoluent de moins de 0,1% d'un cycle à l'autre. La figure 51 illustre les champs de déformations viscoplastiques dans la structure à la fin du 155^{ème} cycle. On constate des gradients importants dans la structure.

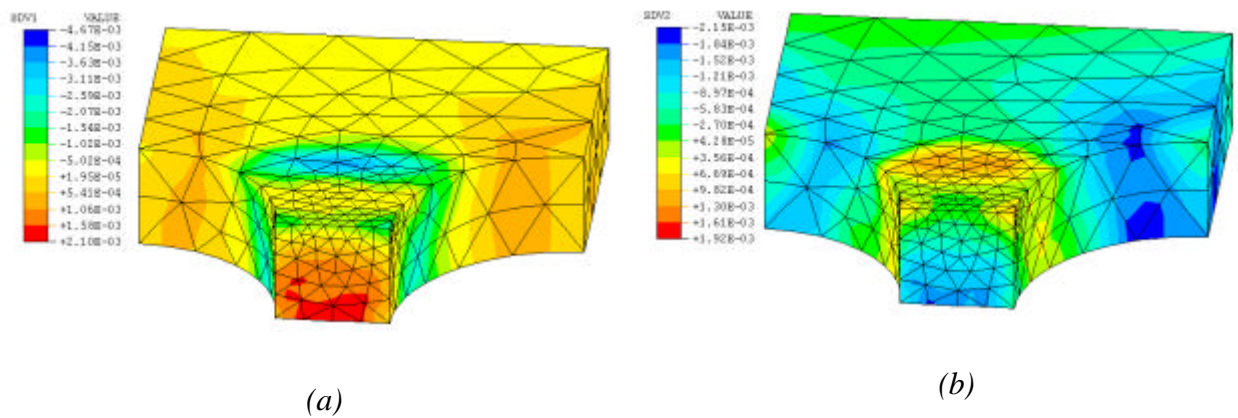


figure 51 :champ de déformation inélastique selon les directions 1 (a) et 2 (b) par un calcul incrémental

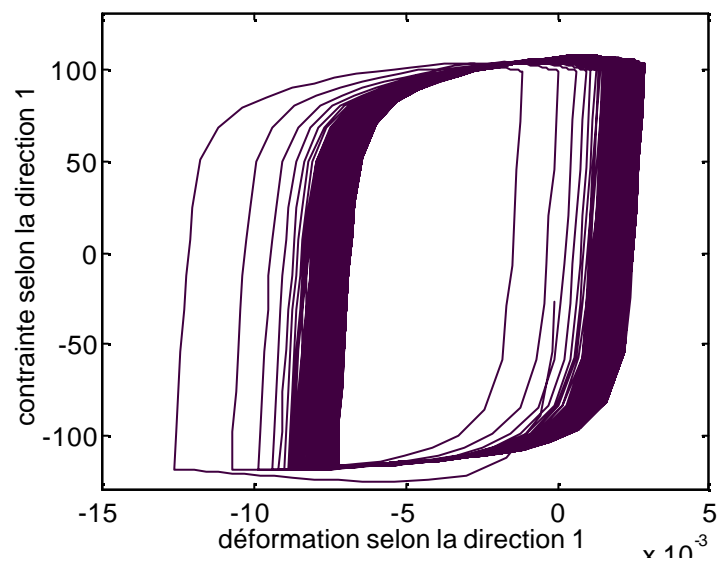


figure 52 :cycle contrainte déformation obtenu par un calcul incrémental

La méthode cyclique directe converge en 260 itérations. Le nombre de termes de Fourier utilisé ici est de 60.

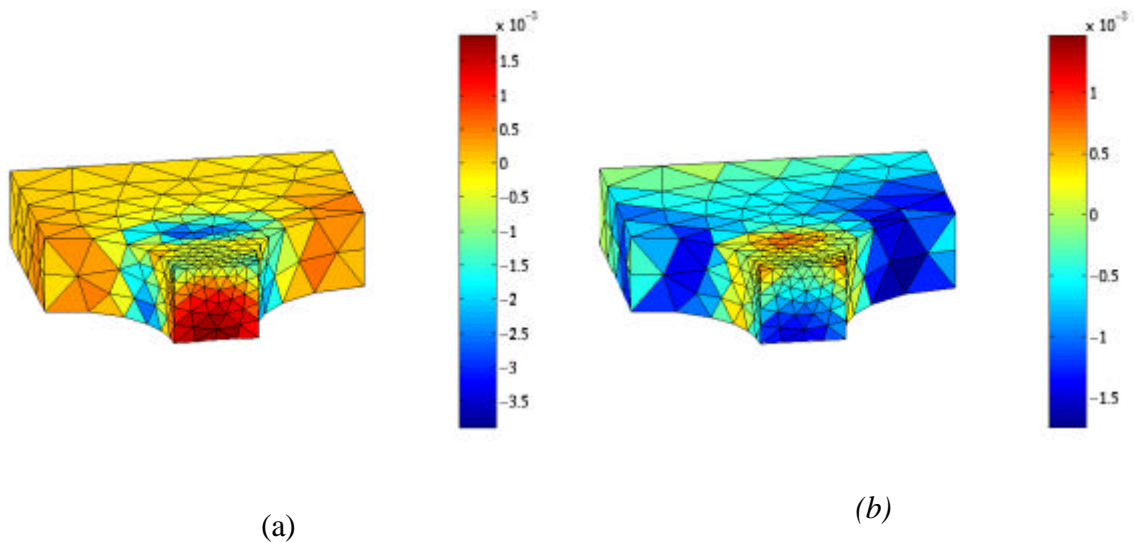


figure 53 :champ de déformation inélastique selon les directions 1 (a) et 2 (b) par le calcul cyclique direct

3. Implémentation de la méthode cyclique directe dans Abaqus

La programmation de la méthode cyclique directe dans le logiciel Abaqus nous permet d'étendre l'application de la méthode à des structures ayant un plus grand nombre de degrés de liberté.

L'algorithme programmé est sensiblement le même que celui présenté dans le chapitre précédent [HIBBITT-KARLSSON-SORENSEN, 03].

Cependant, la prise en compte de la dépendance des paramètres élastiques du matériau à la température a été développée selon l'approche présentée précédemment.

De plus, le nombre de termes de Fourier utilisés peut évoluer au fur et à mesure de la convergence pour permettre une optimisation du compromis de la qualité de la solution et de la rapidité de la convergence.

Dans la suite de ce paragraphe nous illustrerons la méthode avec quelques exemples simulés avec une version test d'Abaqus. Cependant, des problèmes techniques ne nous permettent pas d'utiliser le modèle de comportement élastoviscoplastique présenté et utilisé précédemment. Nous utilisons donc un modèle élastoviscoplastique disponible dans Abaqus dit modèle bicouche élastoplastique-viscoélastique. Ce modèle a été présenté dans [CHARKALUK 01] pour la simulation des fontes. Il sépare les effets plastiques et visqueux par l'intermédiaire des contraintes. La représentation rhéologique de ce modèle correspond à la figure 54.

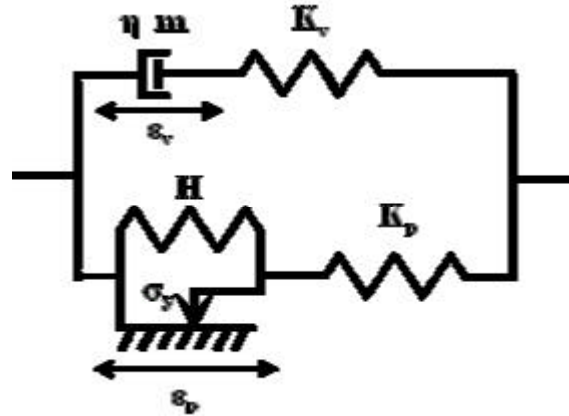


figure 54 : modèle bicouche utilisé

4. Cas tests sous Abaqus

4.1 Cube anisotherme élastoplastique

Le cas test du cube présenté dans le paragraphe précédent est repris ici avec Abaqus. La solution utilisant le maximum de termes de Fourier possible (i.e. 39) donne exactement la solution incrémentale.

La solution avec 5 termes de Fourier est assez loin de la solution incrémentale. Il faut un nombre minimum de termes pour approcher au mieux la solution. 15 termes permettent d'avoir une bonne approximation.

Ces solutions convergent en 150 itérations environ.

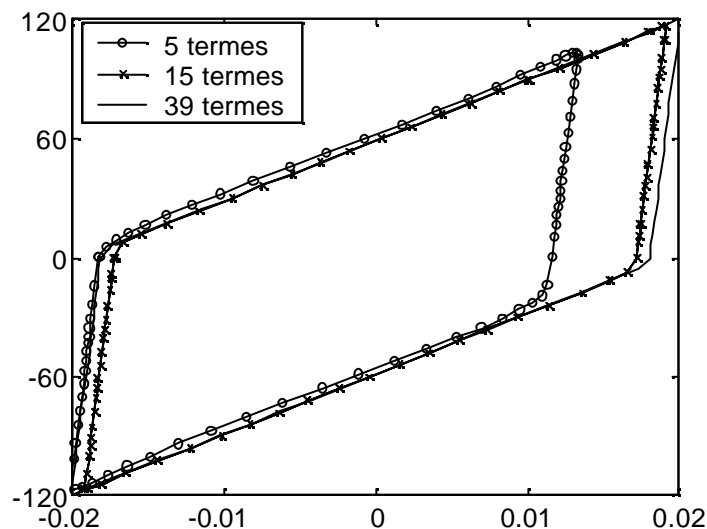


figure 55 : influence du nombre de termes de Fourier sur la solution

Abaqus offre la possibilité d'augmenter le nombre de termes utilisés dans les séries de Fourier au fur et à mesure de la convergence. On voit sur la figure 56 que le fait de commencer avec peu de termes et d'augmenter en cours de convergence (on passe de 5 à 39 termes et de 15 à 39 termes) donne, au final, la même solution. Le nombre d'itérations est cependant plus élevé qu'en utilisant le nombre de termes maximum dès le début, puisque l'on converge alors en 250 itérations environ.

Cela montre que la solution de la méthode ne dépend que du nombre de termes de Fourier utilisés à la fin et non du nombre de termes utilisés en cours de convergence. Cela peut permettre d'optimiser le temps de calcul.

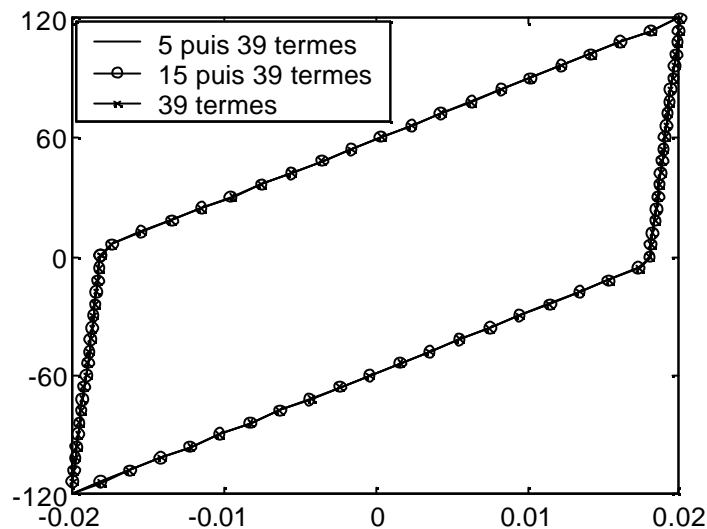


figure 56 : influence du nombre de termes de Fourier

4.2 Comportement de la méthode en cas de rochet

Il est intéressant de valider le comportement de la méthode en cas de comportement de rochet de la structure. Dans ce cas, il n'existe pas de réponse périodique satisfaisant les équations du problème. La méthode cyclique diverge, dans le sens où la solution évolue toujours d'une itération à l'autre, sans stabiliser.

Pour illustrer ceci, nous présentons un modèle simple qui présente un comportement de rochet suivant l'effort appliqué. Celui-ci est constitué de 3 barres soumises à un effort constant. Ces trois barres sont encastrees d'un coté et leurs déplacements à l'autre extrémité sont maintenus égaux par un corps rigide. La section de barre centrale est double des deux autres (figure 57).

Le modèle de matériau utilisé est élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire borné (figure 58).

On applique une température cyclique sur les deux barres extérieures entre 0 et 300°C.

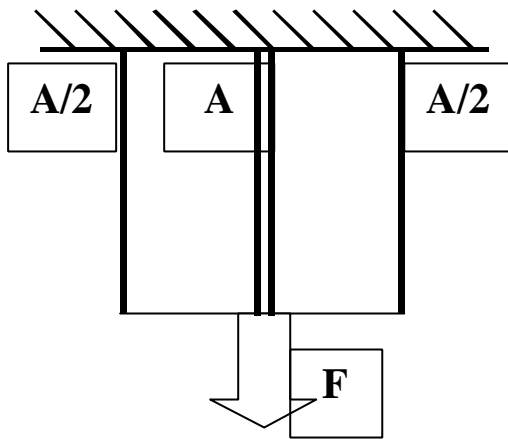


figure 57 : structure des 3 barres

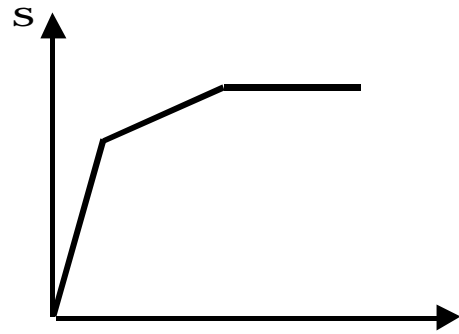


figure 58 : modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire borné

La structure a un effet de rochet. Il y a un cumul de déformation plastique à chaque cycle comme cela est représenté sur la figure 59.

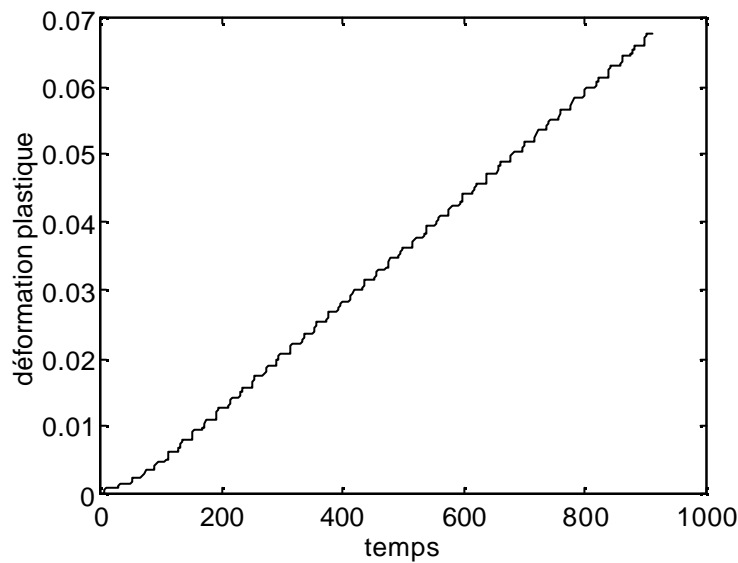


figure 59 : évolution des déformations plastiques illustrant un phénomène de rochet

La méthode cyclique diverge avec ce cas de calcul. A chaque itération, il y a un incrément de déformation plastique entre l'instant initial et l'instant final du cycle. De plus, cet incrément tend vers une constante. La figure 60 montre la divergence de la méthode en indiquant les valeurs des déformations plastiques, à la fin du cycle, toutes les 100 itérations.

Nombre d'itérations	100	200	300	400	500
Déformations plastiques en fin de cycle	.0354	.0712	.1114	.1521	.1927

figure 60 : déformations plastiques en fin de cycle en fonction du nombre d'itérations de la DCM

4.3 Loi de comportement écouissage cyclique

Dans les corrélations présentées précédemment, nous avons toujours travaillé avec un écouissage cinématique. Cependant, la prise en compte d'une part isotrope peut être nécessaire pour représenter certains matériaux. Nous nous proposons de tester la méthode cyclique directe avec une loi de comportement combinant l'écouissage cinématique et isotrope. Cette loi est disponible dans Abaqus. Nous reprenons le cas du cube en appliquant un déplacement imposé cyclique selon la direction verticale, aux nœuds de la face supérieure. Les résultats sont corrélés entre la méthode incrémentale et la méthode cyclique directe.

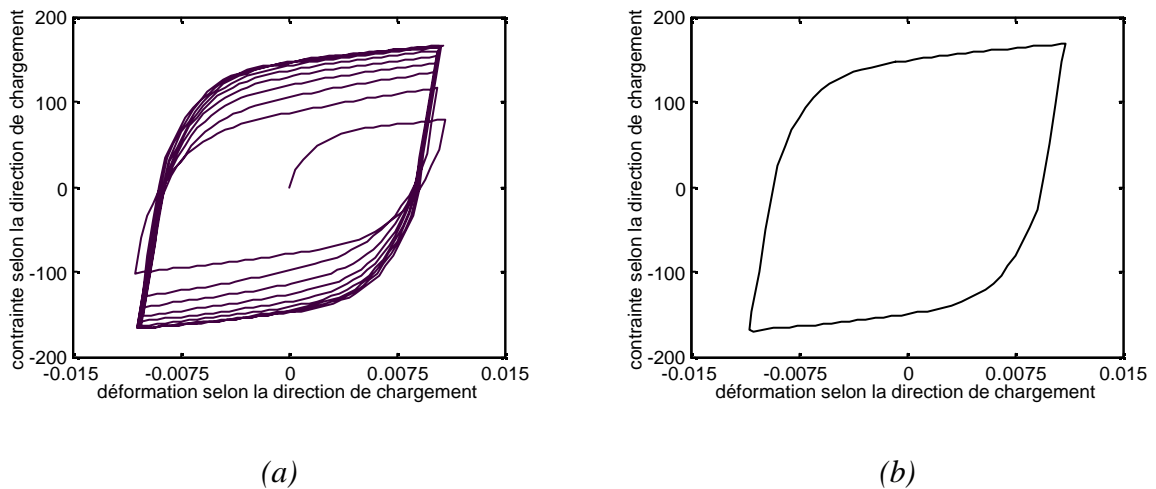
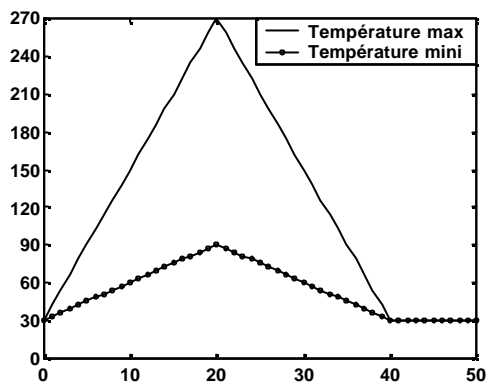


figure 61 : résultats obtenus par la méthode incrémentale et cyclique directe avec une loi de comportement à écouissage combiné

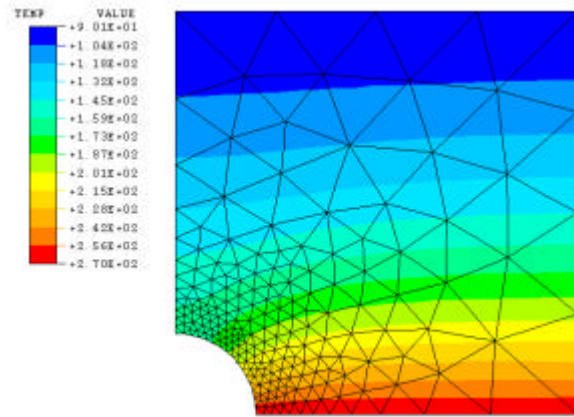
4.4 Plaque trouée anisotherme

Avant d'étudier une structure industrielle, nous analysons un cas de validation suffisamment représentatif de l'ensemble des difficultés rencontrées sur structures (gradients thermomécaniques, champ initial thermomécanique, efforts multidirectionnels, coexistence de zones adaptées et accommodées...). C'est un problème d'un quart de plaque trouée soumis à un chargement thermomécanique cyclique. Contrairement au problème étudié précédemment, on traite le problème en deux dimensions. Le chargement appliqué n'a qu'un intérêt numérique, mais ne représente nullement un essai physique.

La période du cycle est de 50 secondes. Au cours de ce cycle, le coté inférieur de la plaque est soumis à une évolution de température linéaire entre 30 et 270°C selon le cycle représenté sur la figure 62(a) ; le coté supérieur évolue d'une manière identique entre 30 et 90°C. Le champ de température maximale est représenté sur la figure 62(b).



(a)



(b)

figure 62 :chargement thermique appliqué : évolution des températures minimales et maximales sur les côtés bas et haut de la plaque (a), champ de températures maximales (b)

Le chargement mécanique cyclique est un effort de traction-compression appliqué sur le coté droit de la plaque (direction 1). Celui-ci évolue de manière linéaire entre 0 et 225N avec un maximum atteint à 20 secondes.

Dans un premier temps, nous allons étudier la réponse incrémentale et cyclique à ce problème. Ensuite, nous appliquons un champ de déformation inélastique initial avant d'appliquer le chargement cyclique. Enfin, nous remarquerons le comportement de la méthode cyclique directe lorsque l'on applique au préalable, un cycle incrémental avant d'utiliser l'algorithme cyclique.

Chargement cyclique

Nous présentons les résultats aux deux points extrêmes du trou. La méthode incrémentale donne une solution en 50 cycles. Les cycles contrainte-déformation sont représentés sur la figure 63.

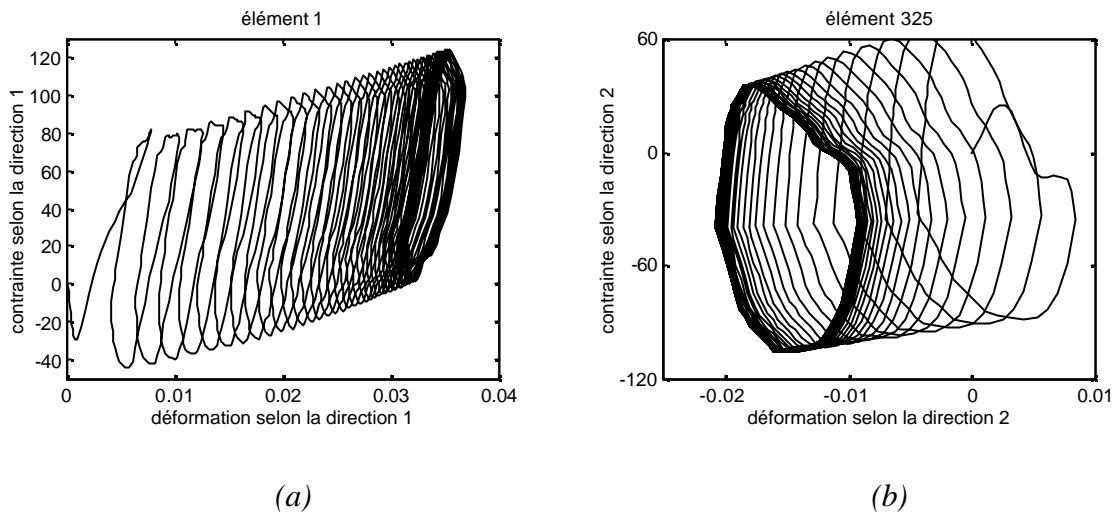


figure 63 : solution incrémentale aux éléments 1 (a) et 325 (b)

Les champs de déformation plastique (déformation inélastique de la partie élastoplastique du modèle bi-couche) selon les deux directions montrent des gradients élevés autour du trou.

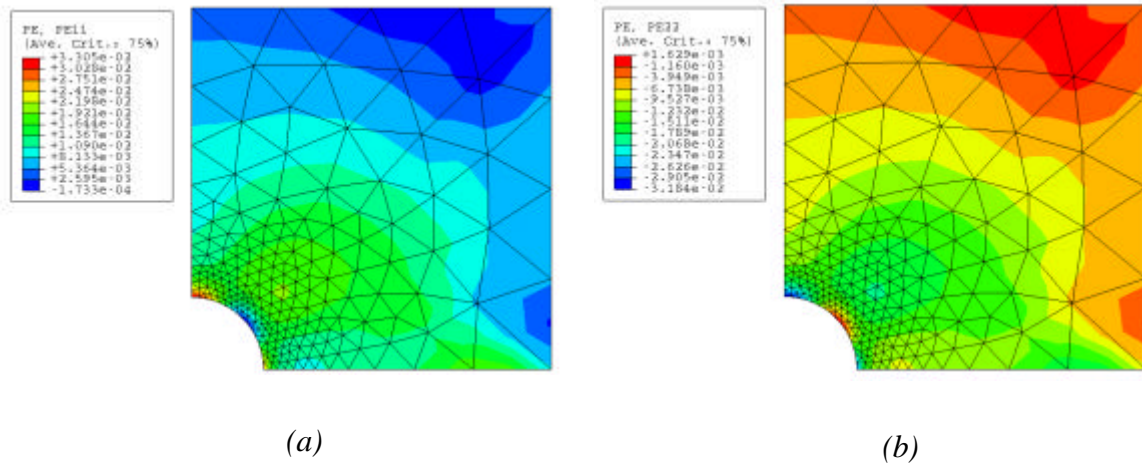


figure 64 : champ de déformation plastique selon la direction 1 (a) et 2 (b)

La méthode cyclique directe converge en 250 itérations. La figure 65 montre les cycles solutions de la méthode cyclique directe toutes les 50 itérations entre la 50^{ème} et la 500^{ème} itérations. Ceci illustre la stabilité de la solution après la convergence.

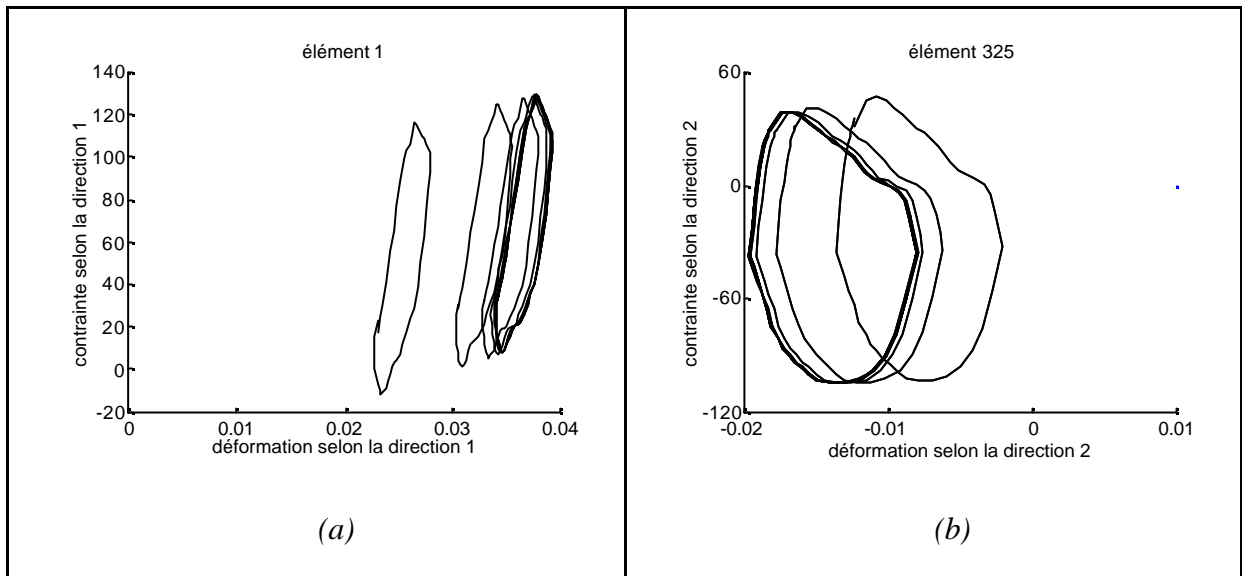


figure 65 : solution de la méthode cyclique directe aux éléments 1 (a) et 325 (b) toutes les 50 itérations, comprises entre 50 à 500

La figure 66 montre que la solution obtenue par la méthode cyclique directe est très proche de la solution incrémentale.

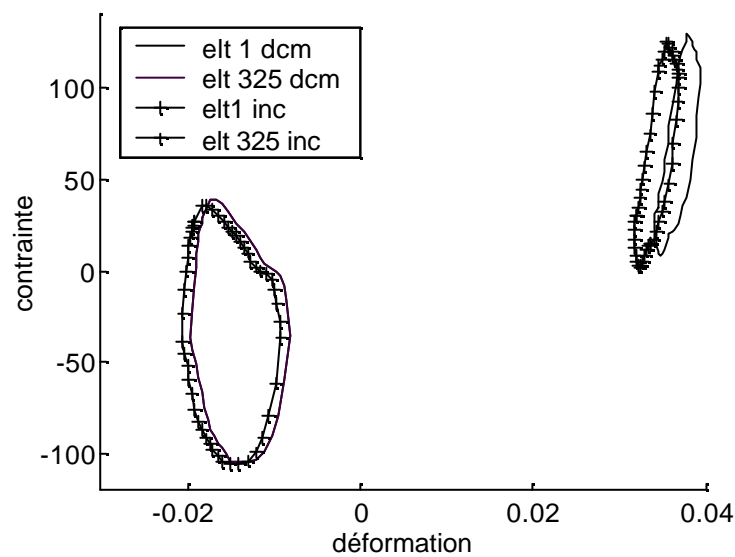


figure 66 : comparaison des solutions incrémentales et cyclique directe pour les deux éléments 1 et 325.

Chargement cyclique avec champ de déformation inélastique initial

On reprend le cas test précédent, mais avant d'appliquer le chargement cyclique, on applique un effort de traction selon la direction verticale (direction 2), afin d'obtenir un champ de déformation inélastique initial. Ce cas montre l'influence de l'état initial d'une

structure sur sa réponse stabilisée, aussi bien par la méthode incrémentale que par la méthode cyclique directe.

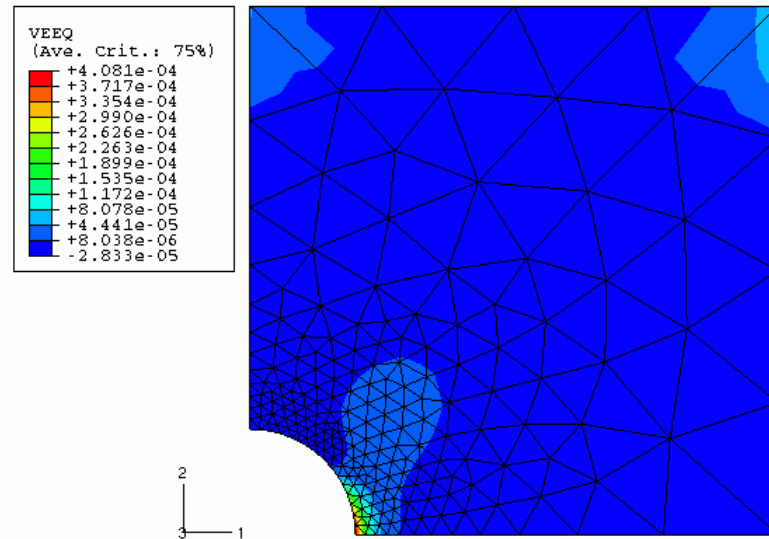


figure 67: champ de déformation visqueuse appliqué en condition initial du chargement cyclique

La solution est alors très différente de celle obtenue à partir d'un état initial vierge. Les deux points travaillent alors en extension, alors que précédemment, le point 325 travaillait en contraction.

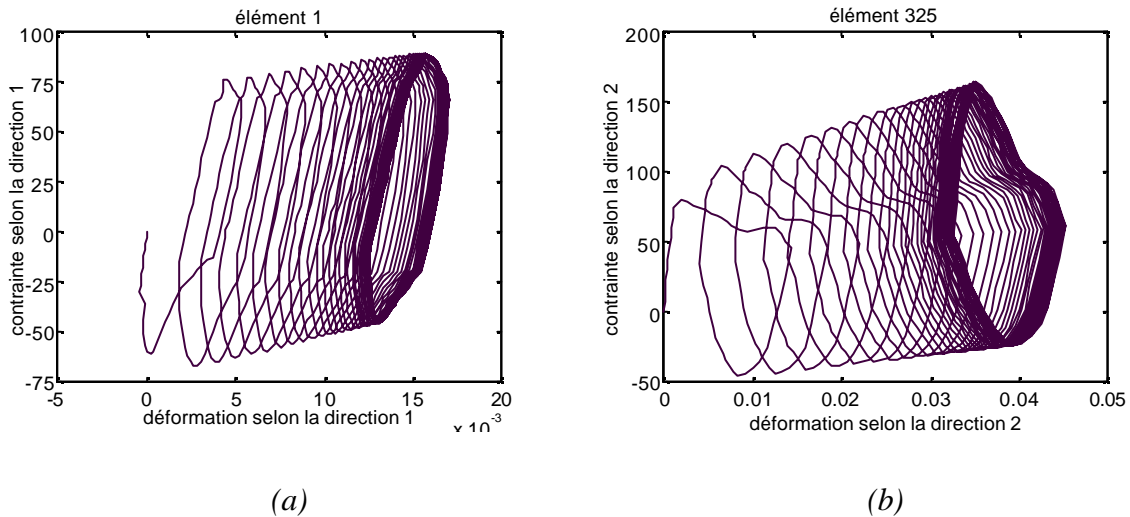


figure 68 : solution incrémentale aux éléments 1 (a) et 325 (b)

La figure 69 illustre la solution obtenue par la méthode cyclique directe avec un champ initial de déformation inélastique imposé. La solution périodique de la méthode cyclique est dépendante de l'état initial.

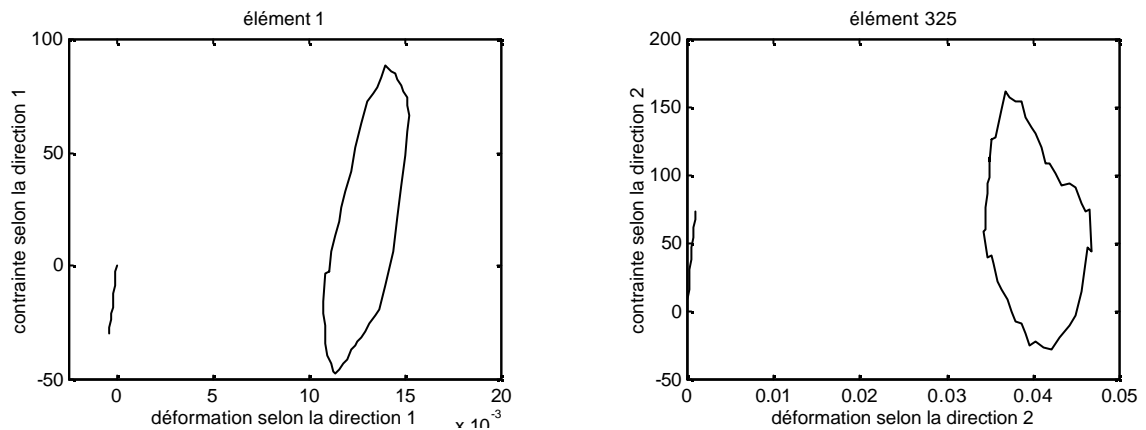


figure 69 : champ initial et cycle contrainte-déformation stabilisé aux points 1 (a) et 325 (b)

On constate sur la figure 70 la bonne corrélation entre les champs de déformation plastique à la fin du cycle stabilisé, obtenus par la méthode incrémentale et par la méthode cyclique directe.

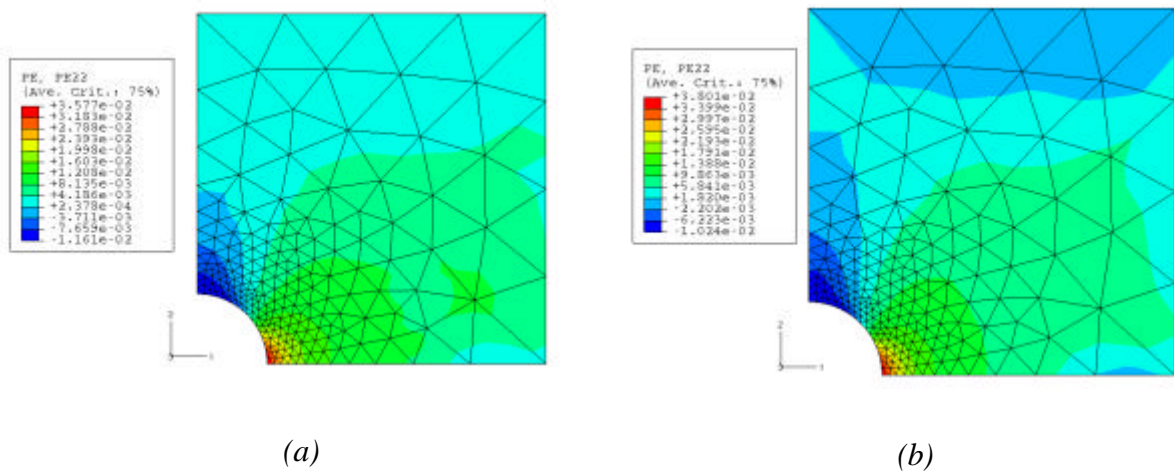


figure 70 : champs de déformation plastique selon la direction 2 obtenus par les méthodes incrémentale (a) et cyclique directe (b)

Champ initial correspondant à un cycle de chargement

Nous étudions maintenant le comportement de la méthode cyclique directe lorsque le champ de déformation initial appliqué correspond au champ de déformation obtenu après un cycle de chargement calculé par la méthode incrémentale. La figure 71 illustre les cycles contrainte-déformation aux points 1 et 325. Sur les courbes, on peut voir l'évolution de la solution au cours du premier cycle, puis le cycle stabilisé, identique à celui obtenu directement par la méthode à partir d'un champ initial vierge.

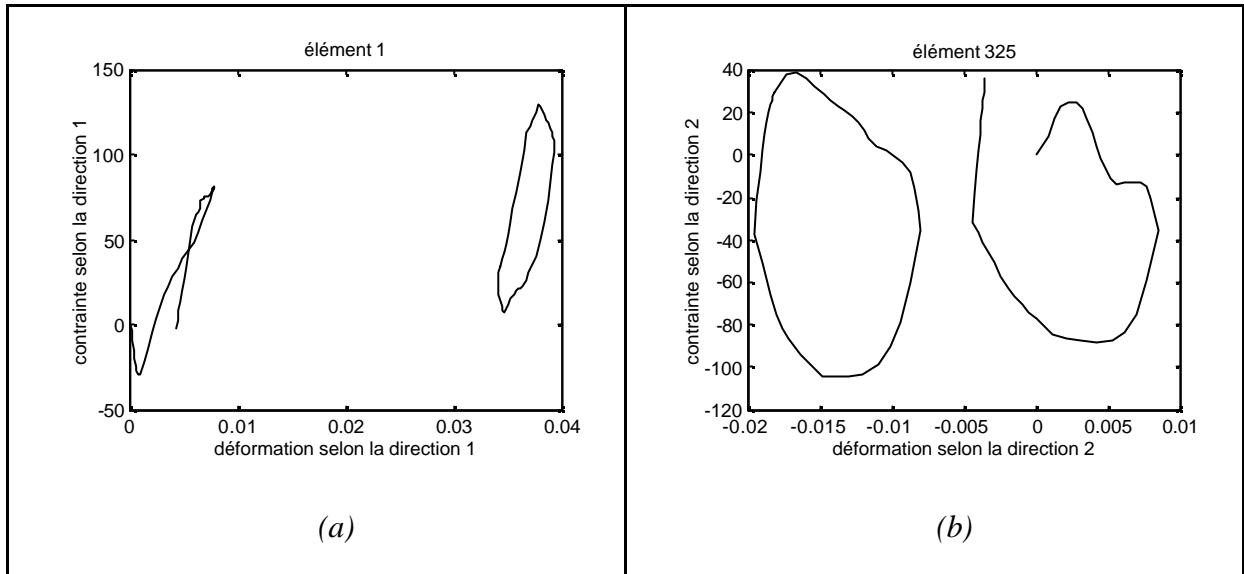


figure 71 : cycle contrainte-déformation initial et stabilisé aux points 1 (a) et 325 (b) par la méthode cyclique directe

4.5 Culasse monocylindre

La dernière structure que nous proposons d'étudier est une culasse dite "monocylindre". Cette structure est utilisée dans la filière de dimensionnement à la fatigue thermomécanique des culasses. Elle représente une géométrie complète de culasse avec une seule face flamme, correspondant à un seul cylindre (figure 72) mais avec l'ensemble du système de refroidissement. Elle permet de mettre en place plus facilement des essais pour tester le comportement de matériaux dans un contexte très proche du domaine d'utilisation. De plus, dans le contexte de corrélation calcul essai, cela permet de mettre en œuvre et de valider la filière numérique avec des temps de réponse beaucoup plus rapides que sur structure réelle.

Cette culasse monocylindre est utilisée sur un banc de fatigue thermique. Elle est chauffée par un chalumeau pour reproduire une sollicitation thermique proche de celle obtenue dans la chambre de combustion.

A partir de la pièce moulée et usinée, une première opération consiste à fretter les sièges des soupapes. Cela consiste à insérer des pièces cylindriques en fonte d'un diamètre supérieur au trou dans la culasse prévu pour les recevoir. La tenue de la zone du pontet est ainsi améliorée car cette opération de frettage induit un champ de contrainte de compression.

La culasse est ensuite serrée sur le bloc moteur, par l'intermédiaire de quatre vis à un niveau d'effort de 10kN.

Après ce chargement mécanique initial, on applique les cycles de chauffage et refroidissement.

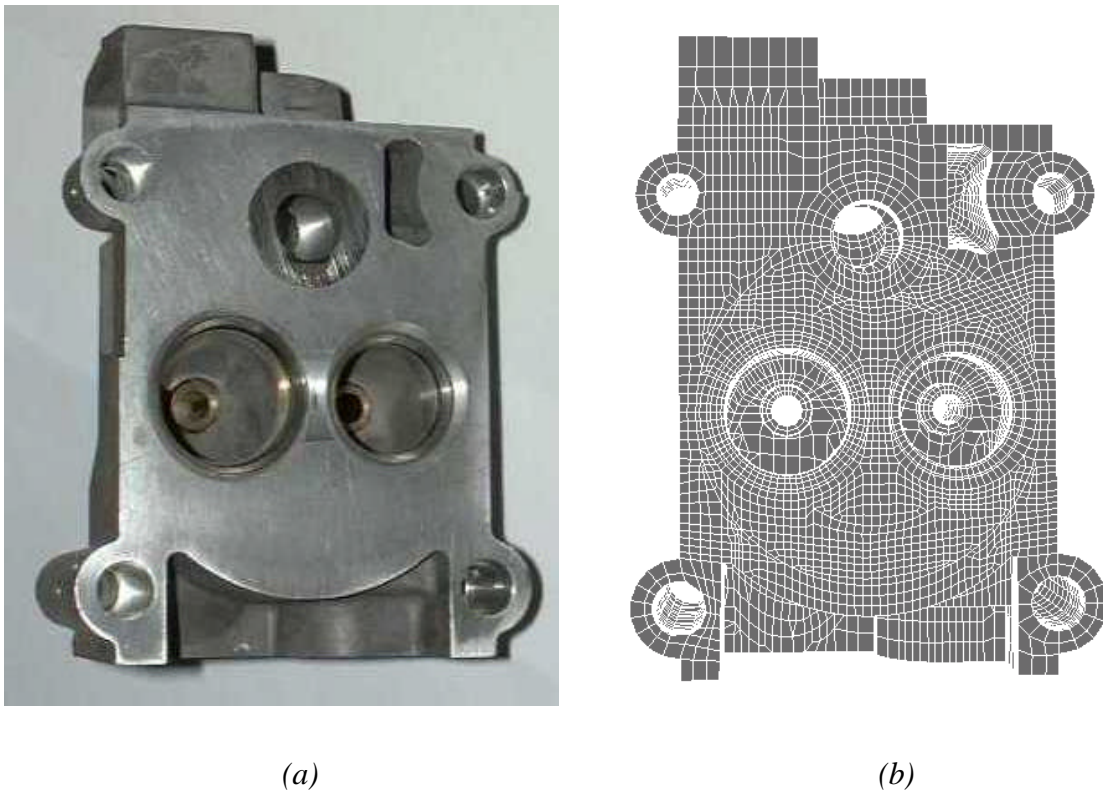


figure 72 : monocylinde : éprouvette (a) et maillage (b)

Modélisation

La modélisation utilisée pour cette culasse monocylinde est tout à fait semblable à celle utilisée sur culasse par les métiers.

Le maillage utilisé est celui représenté sur la figure 72. Il est constitué de 26900 nœuds et 20728 éléments. Les éléments sont des éléments hexaédriques linéaires.

Les simulations thermique et mécanique se font de manière découplée. Le chargement thermique est issu d'une étude développée dans [IVALDI 00]. Des conditions de convection avec l'air et l'eau du circuit de refroidissement et un flux thermique cyclique sur la face flamme permettent d'obtenir un champ de température représentatif des essais sur l'ensemble des phases de chauffage et de refroidissement.

La figure 73 illustre l'évolution cyclique de la température au point le plus sollicité, situé au centre du pontet inter-soupapes.

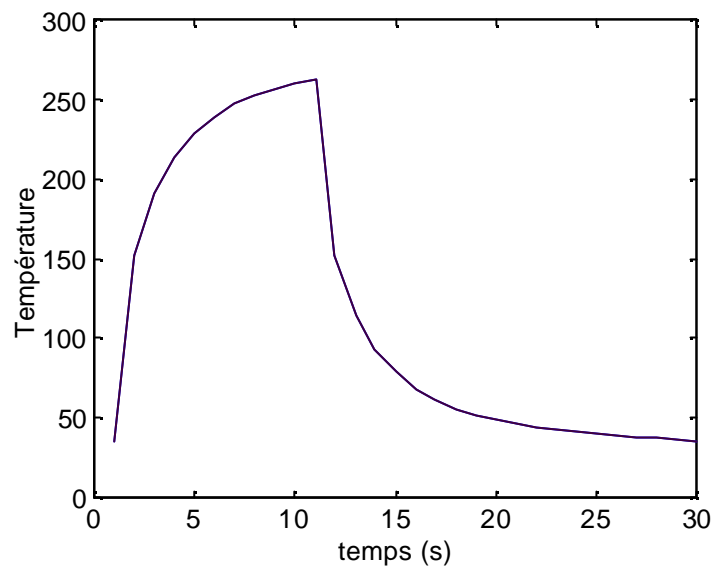


figure 73 : évolution de la température au cours du cycle, au point le plus chargé

Du point de vue mécanique, la modélisation du frettage est faite par l'intermédiaire de contraintes cinématiques imposées aux degrés de liberté des nœuds en vis à vis de la culasse et des sièges. On impose un déplacement radial relatif des nœuds du rayon extérieur des sièges (U_s) et du rayon de la culasse (U_c) correspondant à la valeur de frettage (U_F) (figure 74). Cela permet de s'affranchir de la simulation du contact entre les sièges et la culasse, ce qui est nécessaire pour la méthode cyclique directe, tout en imposant un état initial représentatif.

L'effort dû au serrage de la culasse est modélisé par une liaison par ressorts entre les nœuds extrêmes des puits de vis. Des conditions aux limites bloquent les déplacements des nœuds liés aux vis.

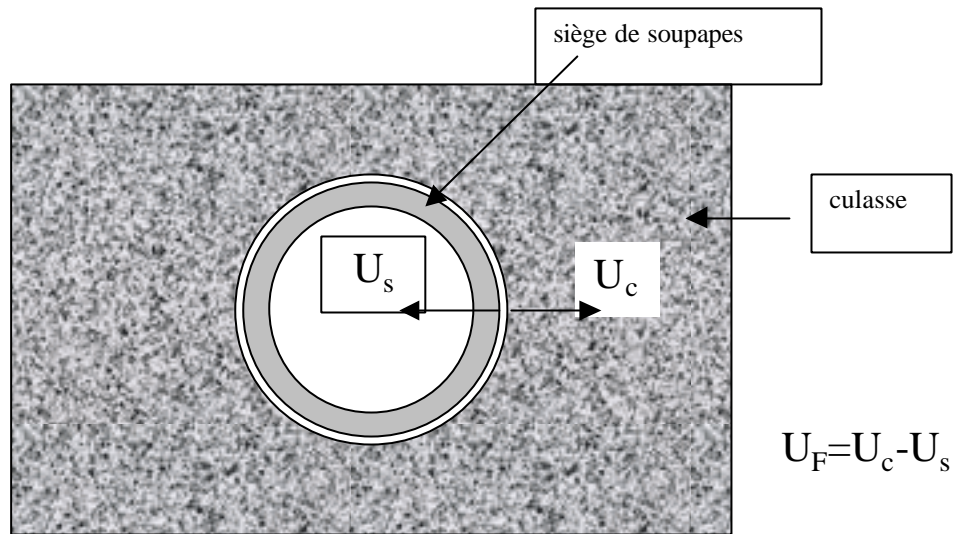


figure 74 : modélisation du fretage sans condition de contact

Le modèle de comportement utilisé est le modèle élastoviscoplastique bicouche. Les paramètres matériaux sont tous dépendants de la température.

La solution incrémentale obtenue en 15 cycles par un calcul incrémental est illustrée sur la figure 75. Les cycles contrainte-déformation mécanique au point le plus sollicité sont tracés pour la direction longitudinale du pontet et la direction transversale. Le niveau de déformation reste assez faible, notamment dans la direction 1.

Le nombre d'incréments déterminé par la gestion automatique du pas de temps d'Abaqus est de 540, alors que 990 itérations ont été nécessaires, soit un pas de temps moyen par cycle de 0.83 secondes. Cela donne un temps de calcul de 79630 secondes.

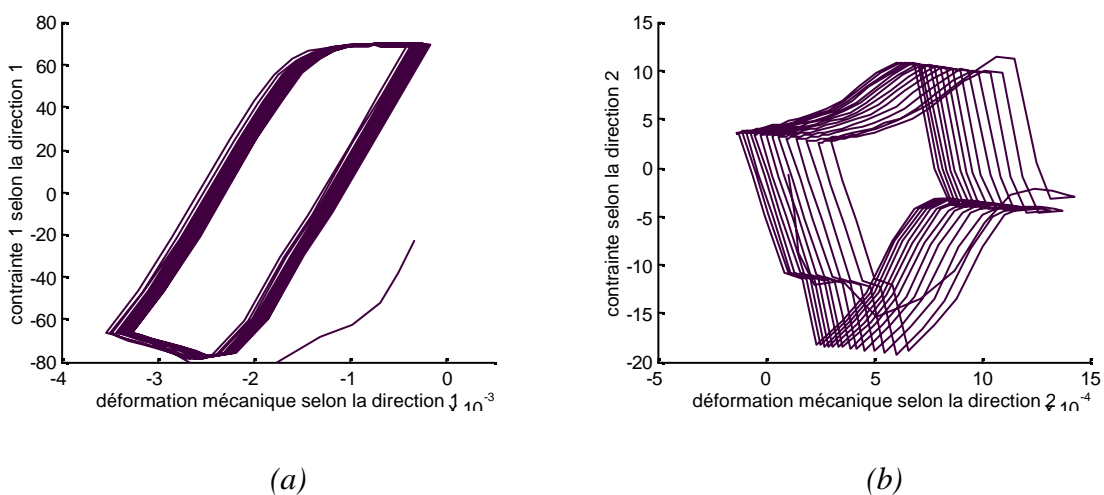


figure 75 : cycle contrainte-déformation mécanique obtenu par la méthode incrémentale selon les directions longitudinale (a) et transversale (b) au pontet

Sur la figure 76, les solutions obtenus par la méthode cyclique directe sont illustrée pour les itérations 10, 15 et 60. L'évolution est lente entre les itérations, particulièrement dans la direction 1. On utilise 21 termes dans la méthode cyclique directe, avec un pas de temps constant de 0.7.

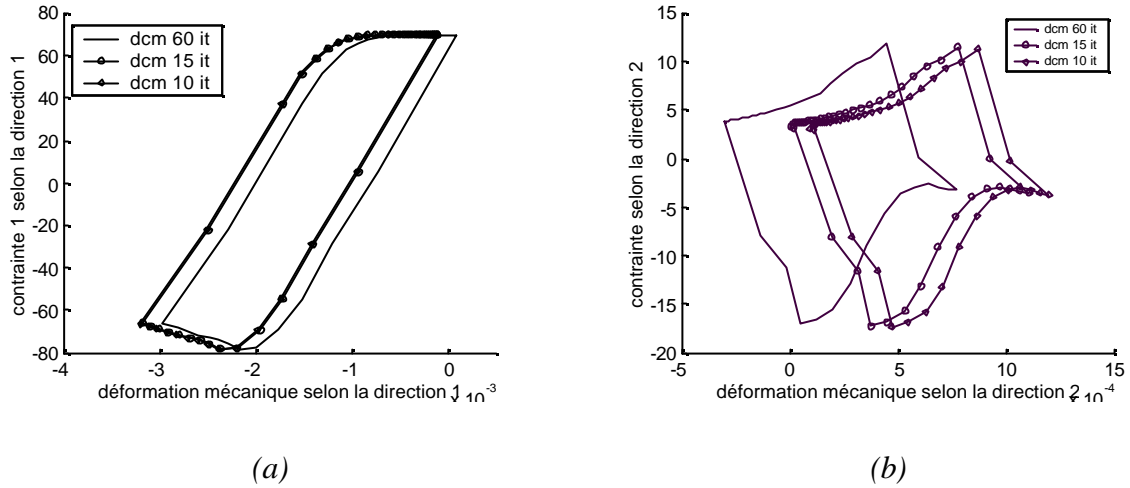


figure 76 : cycle contrainte-déformation mécanique obtenu par la méthode cyclique directe aux itérations 10, 15, 60, selon les directions longitudinale (a) et transversale (b) au pontet

La méthode cyclique directe donne l'allure du cycle très tôt dans la convergence, dès la dixième itération. L'évolution se fait alors sur le niveau moyen des déformations qui tend vers le niveau de la solution stabilisée. La figure 77 permet de comparer les différentes solutions, incrémentale après 15 cycles, et cyclique directe après 10 et 60 itérations.

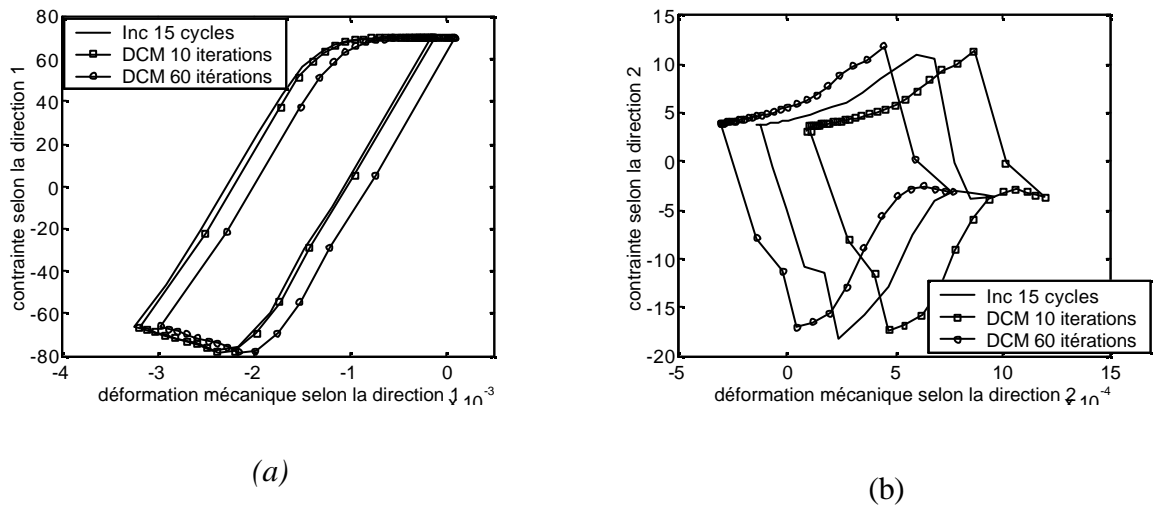


figure 77 : comparaison des cycles obtenus par les méthodes incrémentale et cyclique directe

Les allures de cycles sont, dans les deux directions, parfaitement corrélées entre les méthodes incrémentale et cyclique directe. Par contre, les niveaux moyens de déformations sont différents.

La figure 78 représente l'évolution des déformations à la fin du cycle obtenue par la méthode incrémentale (représentées, par des croix et des losanges respectivement pour les directions 1 et 2) et les déformations à la fin du cycle obtenues par la méthode cyclique directe (représentées par une croix et un carré respectivement pour les directions 1 et 2).

La solution incrémentale n'est pas complètement stabilisée. Par contre, la méthode cyclique directe, après soixante itérations, donne une solution beaucoup plus proche de la solution stabilisée.

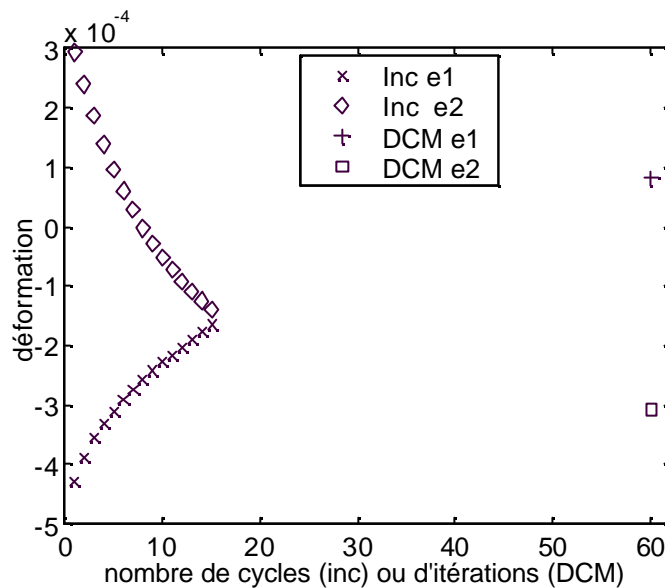


figure 78 : évolution des déformations mécaniques en fin de cycle, en fonction du nombre de cycles incrémentaux et comparaison avec la solution à la 60^{ème} itération de la méthode cyclique directe

La figure 80 donne les temps de calcul de la méthode cyclique directe obtenue dans les mêmes conditions que le calcul incrémental présenté précédemment.

Pour obtenir une solution comparable en terme d'énergie dissipée à la solution incrémentale, la méthode cyclique directe permet un gain de temps d'un facteur 5 (voire 7 pour une solution plus approximative) par rapport à un calcul classique.

Le calcul par la méthode cyclique directe après 60 itérations permet, avec un gain de temps de 20%, d'obtenir une solution beaucoup plus proche que le calcul incrémental.

Ces gains de temps sont obtenus avec des maillages comprenant environ 27000 nœuds. Ils montrent l'intérêt de l'approche cyclique directe. Les gains de temps obtenus sur des maillages de près de 300000 nœuds devraient être particulièrement intéressants pour une application en bureaux d'études.

Nombre d'itérations de la méthode cyclique directe	10	15	60
Temps calcul (s)	10812	16109	65451
temps calcul inc / temps calcul cyclique directe	7.36	5	1.21

figure 79 : temps de calcul de la méthode cyclique directe

4.6 Temps de calcul

Le temps de calcul de la méthode incrémentale est directement lié au temps pris par l'inversion des matrices tangentes. Or, ce temps augmente de manière considérable avec la taille des maillages et bien sûr, avec les non-linéarités du problème nécessitant un plus grand nombre d'itérations pour converger à chaque instant.

Par contre, dans la méthode cyclique directe, l'inversion de la matrice d'élasticité n'a lieu qu'une seule fois. Mais le nombre d'itérations pour obtenir la convergence est supérieur au nombre de cycles nécessaires à la stabilisation par le calcul incrémental, de l'ordre de quatre à cinq fois plus dans les exemples étudiés.

Pour illustrer ceci, nous avons étudié un cas simple : une poutre soumise à deux chargements cycliques (notés ch 1 et 2) d'intensités différentes, entraînant un nombre d'itérations différent (respectivement 40 et 55 itérations). La structure a été maillée plus ou moins finement, pour obtenir des maillages comprenant 10231, 26511 et 31904 nœuds.

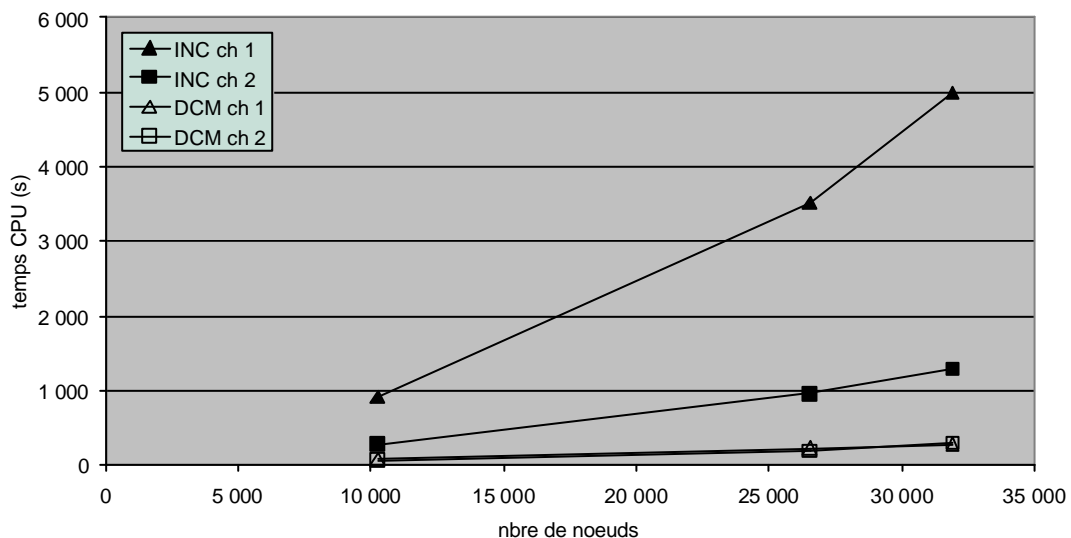


figure 80 : évolution des temps de calcul pour un cycle incrémental et une itération de la méthode cyclique directe pour deux chargements

La figure 80 indique les temps de calculs pour un cycle incrémental et une itération de la méthode cyclique directe.

Le temps de calcul de la méthode incrémentale augmente beaucoup plus rapidement en fonction du nombre de nœuds que la méthode cyclique directe. Cela est amplifié avec une plastification plus importante de la structure.

Si l'on se place dans le cas de la structure à 32000 nœuds, le rapport des temps de calcul d'un cycle de la méthode incrémentale et d'une itération de la méthode cyclique directe évolue entre quatre pour le premier chargement et dix-sept pour le second chargement. En prenant le rapport égal à quatre entre le nombre de cycles et le nombre d'itérations dans les deux méthodes, cela permet jusqu'à un facteur quatre de gain en temps de calcul. Ce rapport augmente avec le nombre de nœuds du modèle.

La validité de la méthode cyclique directe est montrée avec différents exemples comparés à des calculs incrémentaux.

Celle-ci a été implémentée dans Matlab et dans Abaqus.

Différents cas tests ont illustré le comportement de la méthode à diverses caractéristiques :

- matériau élastoplastique et élastoviscoplastique à écrouissage cinématique ou combiné
- phénomène de rochet
- paramètres élastiques dépendant de la température
- prise en compte d'un champ initial

L'application de la filière classique de simulation d'une culasse à un monocylindre a montré la faisabilité et la validité de l'application de la méthode cyclique directe dans un cadre industriel.

Conclusion

Nous avons abordé la simulation numérique des structures soumises à des chargements thermomécaniques cycliques et son application au dimensionnement à la fatigue.

Nous avons tout d'abord vu l'intérêt de ce type de simulation dans le dimensionnement à la fatigue thermomécanique des structures. Une grande majorité des approches de fatigue, et particulièrement celle appliquée chez PSA Peugeot Citroën dans le cadre des pièces moteur travaillant sur de larges amplitudes thermiques, nécessite la détermination de la réponse asymptotique de la structure. Un post-traitement des grandeurs mécaniques stabilisées ou pseudo-stabilisées, par l'intermédiaire d'un critère approprié, permet de déterminer la durée de vie des structures. Ceci est actuellement, suffisamment prédictif et robuste pour être appliqué en bureaux d'études dans le contexte de projets industriels.

Nous avons vu dans le second chapitre, la modélisation des structures soumises à des chargements cycliques. Après avoir décrit le comportement asymptotique des structures, nous avons présenté différentes techniques de simulation numérique. La première et la plus générale est la méthode incrémentale. Elle permet de traiter la plupart des types de sollicitations. Cependant, dans le cas des chargements cycliques, elle n'est pas très performante et reste trop lente pour des applications industrielles représentatives, notamment pour simuler des structures à grand nombre de degrés de liberté, soumises à plusieurs cycles.

Parmi les techniques présentées, nous pouvons distinguer deux catégories de stratégie :

- La méthode à grand incrément de temps et la technique du saut de cycles permettent de simuler l'ensemble du trajet de chargement. Elles s'appliquent bien à une approche couplée en fatigue entre le comportement du matériau et son endommagement.
- La méthode ZAC, l'approche cyclique de Nguyen et la méthode du contrôle optimal se concentrent sur la simulation du cycle stabilisé et s'adaptent mieux à une approche découplée de dimensionnement à la fatigue.

Cependant, ces techniques ne semblent pas parfaitement adaptées à la simulation des culasses, de par les hypothèses faites ou de par les temps de calcul nécessaires pour des structures à grand nombre de degrés de liberté.

Pour répondre au problème posé de développer une stratégie de simulation des culasses pour le dimensionnement à la fatigue thermomécanique, nous avons développé une méthode initialement proposée dans le cas de la simulation élastoplastique isotherme de contact à faibles débattements entre deux solides (fretting).

Pour améliorer les temps de résolutions de la méthode cyclique directe, nous avons proposé une recherche des solutions de l'étape globale par série de Fourier, limitant ainsi les résolutions de systèmes globaux, très coûteux en temps de calcul.

Les points clés de la méthode cyclique directe, sont :

- recherche d'une solution périodique à un cycle de chargement

- séparation de la résolution des étapes locales globales sur l'ensemble du cycle
- recherche de la solution globale en série de Fourier
- périodicité imposée pour améliorer la convergence

Nous avons présenté cette stratégie de résolution par série de Fourier dans un cadre général de résolution des problèmes non-linéaires, avec l'écriture de la matrice tangente cohérente associée.

Cette méthode a ensuite été validée par différents cas. Ce travail a été conclu par la simulation d'une culasse monocylindre, avec une méthodologie équivalente à celle utilisée en projets. Les résultats corrélés et les gains en temps de calcul par rapport à la méthode incrémentale (de l'ordre de 5) montre l'intérêt de la méthode cyclique directe.

Ces gains de temps devraient être plus importants en augmentant la taille des maillages et laissent présager un gain substantiel lors des simulations de culasses réelles.

La méthode cyclique directe sera disponible dans la prochaine version commerciale du logiciel Abaqus.

Outre l'application de la méthode cyclique directe à d'autres simulations dans différents domaines où la fatigue est étudiée, les perspectives de ce travail sont :

- prise en compte du contact :

La prise en compte du contact peut être envisagée en insérant dans le schéma itératif présenté, une étape locale supplémentaire de calcul des conditions de contact. Il sera alors nécessaire d'ajouter une boucle itérative entre l'étape globale et l'étape locale de contact, avant de déterminer les solutions plastiquement admissibles.

- simulation des chargements transitoires

en supprimant l'hypothèse de périodicité, il est possible de traiter des problèmes non périodiques comme par exemple, la simulation des procédés de traitement thermique des culasses.

Bibliographie

- [AKE 89] AKEL S. NGUYEN Q.S., *Determination of the limit response in cyclic plasticity*, In Computational plasticity , Barcelona, Pineridge Press, Paris, 1989.
- [ARZ 94] ARZT M, approche des phénomènes cycliques par la méthode à grand incrément de temps, thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1994.
- [AZZ 02] AZZOUZ F., CAILLETAUD G, FOERCH R., MORIN G, QUILICI S., RAGOT P., *Identification of viscoplastic constitutive and creep-fatigue damage coefficients to use in Abaqus automotive structural calculations with the Zmat library*, 2002 users' conference proceedings, Newport RI, 2002.
- [BAT 95] BATOZ J.L., DHATT G., *modélisation des structures par éléments finis*, vol. I-III, hermès, 1995.
- [BEN 87] BENALLAL A., BEN CHEIKH A., *Damage and rupture of viscoplastic structures under anisothermal cyclic loadings*, Proceedings of MECAMAT, vol II, p37-52, 1987.
- [BOI 87] BOISSE P., nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures élastoplastiques, thèse de l'université Paris VI, 1987.
- [BOI 90] BOISSE P., BUSSY P., LADEVÈZE P., *A new approach in non-linear mechanics : the large time increment method.*", Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 29 : p647-663, 1990.
- [BOI 99] BOISSE P., *Mécanique non linéaire*, cours de l'Esem, 1999.
- [BOU 98] BOUSSAC O., *Propriétés physiques de l'AS7G03*, rapport interne PSA, 1998.
- [CAR 94] CARDONA A., COUNE T., LERUSSE A., GÉRADIN M., *A multiharmonic method for non-linear vibration analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol 37 : p1593-1608, 1994.
- [CHA 74] CHABOCHE J.L., STOLTZ C., *Détermination des durées de vie des aubes de turbine à gaz*, Revue Française de Mécanique, p37-47, 1974.

- [CHA 97] CHABOCHE J.L., *Prévision de l'amorçage à chaud*, In « *La fatigue des matériaux et des structures* », Bathias C. Baille J.C, Hermès, 1997.
- [CHA 99] CHARKALUK E., Dimensionnement des structures à la fatigue thermomécanique, thèse de l'Ecole Polytechnique, 1999.
- [CHA 00] CHARKALUK E., *Implémentation d'une User Subroutine UMAT dans Abaqus Standard*. Rapport interne PSA, 2000.
- [CHA 00] CHARKALUK E. CONSTANTINESCU A., *An energetic approach in thermomechanical fatigue for silicon molybdenum cast iron*, Materials at high temperature, 17(3) : p373-380, 2000.
- [CHA 01] CHARKALUK E., *Note de synthèse de l'analyse fiabiliste en fatigue thermique*, Rapport interne PSA, 2001.
- [COF 53] COFFIN L.F., *A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile material*, Trans. ASME, 53-A76 : p931-950, 1953.
- [COG 89] COGNARD J.Y., *une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité : la méthode à grand incrément de temps*, thèse de l'université Paris VI, 1989.
- [COG 93] COGNARD J.Y., LADEVÈZE P., *a large time increment approach for cyclic viscoplasticity*, Int. J. of Plasticity, Vol. 9 : p141-157, 1993.
- [COG 99] COGNARD J.Y., LADEVÈZE P., TALBOT P., *a large time increment approach for thermo-mechanical problems*, Advances in Engineering software, Vol. 30 : p583-593, 1999.
- [COU 92] COUNE T., CARDONA A., GERADIN M., *Etude du frottement multi-harmonique : étude de faisabilité du système à N ddl*, Rapport interne du LTAS-Dynamique des Constructions Mécaniques, Université de Liège, 1992.
- [CRO 56] CROSSLAND B., *Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel*, Int. Conf. Fatigue of Metals, Institution of Mechanical Engineers, London, p138-149, 1956.
- [DAN 73] DANG VAN K., *Sur la résistance à la fatigue des métaux*, Sciences Technique Armement, 47(3), 1973.
- [DAN 99] DANG VAN K., "Introduction to fatigue analysis in mechanical design by the multiscale approach", in : Dang Van K., Papadoupoulos I.V. (eds), *High-Cycle Metal Fatigue in the Context of Mechanical Design*, CISM Courses and Lectures n° 92, Springer-Verlag, pp.57-88, 1999.

- [DEJ 02] DEJACK M, TANG A, HAZINE R, SU X., *An overview of Abaqus use in engine engineering at Ford Motor Company*, 2002 users' conference proceedings, Newport RI, 2002.
- [FRA 95] FRANÇOIS D., PINEAU A., ZAOUI A., *Comportement mécanique des matériaux*, Vol. I-II, Hermès, 1995.
- [FRE 66] FREDERICK CO. ARMSTRONG P.J., *Convergent Internal Stresses and Steady Cyclic State of stress*, J. Strain Analysis, 1 : p154, 1966.
- [HAL 73] HALFORD GR. HIRSCHBERG M.H. MANSON S.S., *temperature effects on the strainrange partitioning approach for creep fatigue analysis*, Fatigue at Elevated Temperatures, ASTM STP520 : p658-669, 1973.
- [HAL 75] HALPHEN B, NGUYEN QS., *sur les matériaux standards généralisés*, J. mécanique, 14(1) : p39-63, 1975
- [HAL 76] HALPHEN B., *L'accommodation des structures élastoplastiques à écrouissage cinématique*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris Série A, t 283 : p799-802, 1976.
- [HAL 78] HALPHEN B., *Accommodation et adaptation des structures élastoviscoplastiques et plastiques*, Séminaire « Matériaux et structures sous chargement cyclique », Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, 1978.
- [HKS 98] HIBBITT, KARLSSON, SORENSEN INC., *Abaqus 5.8 : Theory Manual*, HKS Inc, 1998.
- [HKS 03] HIBBITT, KARLSSON, SORENSEN INC., *Abaqus 6.4 : Theory Manual*, HKS Inc, 2003.
- [IVA 00] IVALDI D., *Identification du chargement thermique de la culasse monocylindre*, rapport interne PSA, 2000.
- [KHA 01] KHALIJ L., HARIRI S., VAUCHER R., *Analyse simplifiée – Détermination des états limites et des contraintes résiduelles – Validation sur des structures tridimensionnelles*, XVème Congrès Français de Mécanique, Nancy : p, 2001.
- [KRU 92] KRUCH S., *Numerical analysis of an engine turbine disk loaded with a large number of thermomechanical cycles*, third Int. Conf on Computational Plasticity, Barcelona : p1733-1744, 1992.

- [LAD 85] LADEVEZE P., *Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 300 série II : p41-44, 1985.
- [LAD 89] LADEVEZE P., *La méthode à grand incrément de temps pour l'analyse de structures à comportement non linéaire décrit par variables internes*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, t. 309 série II : p1095-1099, 1989.
- [LAD 96] LADEVEZE P., *Mécanique non linéaire des structures*, Hermès, 1996.
- [LEM 74] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *A non-linear model of creep-fatigue damage cumulation and interaction*, Symposium IUTAM sur la mécanique des milieux et des corps viscoélastiques, Gothenburg (Suède), 1974.
- [LEM 96] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1996.
- [LES 89] LESNE P.M., SAVALLE S., *An efficient cycle jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles*, Second Int. Conf on Computational Plasticity, Barcelona : p591-602, 1989.
- [MAI 72] MAIER G., *A shake-down matrix theory allowing for workhardening and second order geometric effects.*, A. Sawzuk (ed.) Symposium on foundations of plasticity , p417-433, 1972.
- [MAI 01] MAIER G., *On some issues in shakedown analysis.*, J. Appl. Mech., 68 : p799-808, 2001.
- [MAI 89] MAÏTOURNAM H.M., *Formulation et résolution numérique thermoviscoplastique en régime permanent*, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989.
- [MAI 02] MAÏTOURNAM H.M., POMMIER B., THOMAS J.J. , *Détermination de la réponse asymptotique d'une structure anélastique sous chargement thermomécanique cyclique*, C.R.A.S. Mécanique, 330 : p703-708, 2002.
- [MAN 76] MANDEL J., *Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations*, Mechanical Research Communications, 3 : p483-488, 1976.
- [MAN 53] MANSON S.S., *Behavior of materials under conditions of thermal stress*, Technical note 2933, NACA, 1953.
- [MAO 97] MAOUCHE N., *Modélisation des phénomènes d'endommagements dus aux contacts à faible amplitude de débattement*, thèse de l'Ecole Polytechnique, 1997.

- [MAO 97] MAOUCHE N, MAITOURNAM M.H., DANG VAN K, *On a new method of evaluation of the inelastic state due to moving contacts*, Wear, 203-204 : p139-147, 1997.
- [MEL 36] MELAN E., *Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff. Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien), Abt. IIA*, 195-218, 1936.
- [NIC 02] NICOULEAU-BOURLES E., EL MAYAS N, MASSINON D , CAILLETAUD G, *Thermomechanical fatigue of aluminium alloys : experimental study and numerical simulation.*, Thermal Stresses 99, Cracovie, p241-244, 1999.
- [NGU 77] NGUYEN Q.S., *On the elastic plastic initial-boundary value problem and its numerical integration*, Int. J. for Numerical Methods in Engng, 11: p817-832, 1977.
- [NGU 81] NGUYEN Q.S., RAHIMIAN M., *Mouvement permanent d'une fissure en milieu élastoplastique*, J. Mech. Appl., p95-120, 1981.
- [NGU 00] NGUYEN Q.S., *Stabilité et mécanique non linéaire*, Hermès, 2000.
- [NGU 03] NGUYEN Q.S., *On shakedown analysis in hardening plasticity*, J. of the Mechanics and Physics of Solids, 51 : p101-125, 2003.
- [NGU 02] NGUYEN-TAJAN T.M.L., *Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne*, thèse de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [PEI 01] PEIGNEY M., STOLZ C., *Approche par contrôle optimal des structures élastoviscoplastiques sous chargement cyclique*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris Série II b, t 329 : p643-648, 2001.
- [POM 01] POMMIER B., MAÏTOURNAM H.M., GAOMBALET J., *Détermination de cycle limite par une méthode cyclique directe*, actes du 5^{ème} colloque national de calcul des structures, Giens 2001.
- [PON 01] PONTER A.R.S., CHEN H, *A minimum theorem for cyclic load in excess of shakedown, with application to the evaluation of a ratchet limit*, Eur. J. Mech. A/Solids, p539-553, 2001.
- [SAL 98] SALENÇON J., *Mécanique des milieux continus*, imprimerie de l'école Polytechnique, 1998.
- [SER 00] SERMAGE J.P., LEMAITRE J., DESMORAT R., *Multiaxial creep-fatigue under anisothermal conditions*, Fatigue Fract Engng Mater Struct, 23 : p241-252, 2000.

- [SIM 85] SIMO J.C. TAYLOR R.L., *Consistent tangent operators for rate-independent plasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 48 : p101-118, 1985.
- [SIM 98] SIMO J.C. HUGHES T.J.R., *Computational Inelasticity*, Springer Verlag 1998.
- [SIN 59] SINES G., *Behavior of metals under complex static and alternating stresses*, Metal Fatigue, McGraw Hill, New York, p145-169, 1959.
- [SKE 98] SKELTON R.P. VILHELMSSEN T. WEBSTER G.A., *Energy criteria and cumulative damage during fatigue crack growth*, Int. J. Fatigue, vol.20 : p641-649, 1998.
- [TAI 73] TAIRA S., *Relationship between thermal Fatigue and low-cycle fatigue at elevated temperatures*, Fatigue at Elevated Temperatures, ASTM STP520 : p80-101, 1973.
- [TAK 99] TAKAHASHI T., SASAKI K., *Inelastic behavior and evaluation method for low cycle fatigue of aluminium alloy*, Revue technique d'Isuzu, 101, 1999.
- [THO 98] THOMAS J.J., PERROUD G, BIGNONNET A., MONNET D., *Fatigue design and reliability in the automotive industry*, In. G. Marquis editor, Fatigue Design'98-3rd International Symposium on Fatigue, p1-11, 1998.
- [THO 02] THOMAS J.J., VERGER L., BIGNONNET A., MARTIN-BORRET S., *Thermomechanical design in the automotive industry*, SAE World Congress, 2002.
- [VER 00] VERGER L., CONSTANTINESCU A, CHARKALUK E., *On the simulation of large viscoplastic structures under anisothermal cyclic loading*, IUTAM Creep in Structures 2000, ed. Murakami and Ohno, Kluwer, 2000.
- [VER 02] VERGER L., *Sur la fatigue thermomécanique d'un alliage d'aluminium. Application au dimensionnement des structures*, thèse de l'Ecole Polytechnique, 2002.
- [ZAC 90] ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G., KASMAI-NAVIDI P., *A new approach in inelastic analysis of structures*, CADLM, 1990.
- [ZIE 00] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *the finite element method*, vol. I-II, Butterworth-Heinemann, 2000.